

NILSYSTÈMES D'ORDRE DEUX ET PARALLÉLÉPIPÈDES

BERNARD HOST & ALEJANDRO MAASS

RÉSUMÉ. En topologie dynamique, une famille classique de systèmes est celle formée par les rotations minimales. La classe des nilsystèmes et de leurs limites projectives en est une extension naturelle. L'étude de ces systèmes est ancienne mais connaît actuellement un renouveau à cause de ses applications, à la fois à la théorie ergodique et en théorie additive des nombres.

Les rotations minimales sont caractérisées par le fait que la relation de proximalité régionale est l'égalité. Nous introduisons une nouvelle relation, celle de *bi-proximalité régionale*, et montrons qu'elle caractérise les limites projectives de nilsystèmes d'ordre deux.

Les rotations minimales sont liées aux suites presque périodiques et de même les nilsystèmes correspondent aux *nilsuites*. Ces suites introduites en théorie ergodique sont intervenues depuis dans certaines questions de théorie des nombres. De notre caractérisation des nilsystèmes d'ordre deux nous déduisons une caractérisation des nilsuites d'ordre deux.

Les démonstrations s'appuient d'une manière essentielle sur l'étude des « structures de parallélépipèdes » développée par B. Kra et le premier auteur.

ABSTRACT. A classic family in topological dynamics is that of minimal rotations. One natural extension of this family is the class of nilsystems and their inverse limits. These systems have arisen in recent applications in ergodic theory and in additive combinatorics, renewing interest in studying these classical objects.

Minimal rotations can be characterized via the regionally proximal relation. We introduce a new relation, the bi-regionally proximal relation, and show that it characterizes inverse limits of two step nilsystems.

Minimal rotations are linked to almost periodic sequences, and more generally nilsystems correspond to nilsequences. These sequences were introduced in ergodic theory and have since been used in some questions of Number Theory. Using our characterization of two step nilsystems we deduce a characterization of two step nilsequences.

The proofs rely on in an essential way the study of “parallelepiped structures” developed by B. Kra and the first author.

1. INTRODUCTION

Un *système dynamique topologique* (abrégé en « système ») (X, T) est un espace compact métrisable X muni d'un homéomorphisme $T: X \rightarrow X$. Ce système est *transitif* s'il existe au moins un point $x \in X$ dont l'orbite $\{T^n x; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans X ; il est *minimal* si l'orbite de tout point est dense dans X . Cette propriété est équivalente à la condition que les seuls fermés de X invariants par T sont X et l'ensemble vide.

Date : 2 Août 2006.

1.1. Systèmes équicontinus et nilsystèmes. Une famille classique de systèmes minimaux est celle formée par les *rotations minimales* (ces systèmes sont appelés *systèmes de Kronecker* dans [Fu]). Dans ce cas, X est un groupe abélien compact et la transformation T a la forme $x \mapsto \alpha x$, où $\alpha \in X$ est une constante telle que $\{\alpha^n ; n \in \mathbb{Z}\}$ soit dense dans X .

Un système minimal est *équicontinu* si et seulement si il est isomorphe à une rotation minimale. Ces systèmes peuvent être caractérisés au moyen de la *relation de proximalité régionale* : pour chaque système minimal (X, T) , cette relation est une relation d'équivalence sur X et le système est équicontinu si et seulement si cette relation est l'égalité [Au]. La définition et les propriétés de cette relation sont rappelées dans la section 2.1.

Nous nous intéressons ici à une famille plus générale de systèmes, les *nilsystèmes*. L'étude de ces systèmes est ancienne mais connaît actuellement un renouveau à cause de ses applications, à la fois en théorie ergodique (voir par exemple [CL1], [CL2], [HK1], [BHK]) et en théorie additive des nombres (voir [GT1], [GT2]). Nous en donnons ici la définition, les propriétés utiles sont rappelées dans la section 5.1.

Définition 1. Soient $k \geq 1$ un entier, G un groupe de Lie nilpotent d'ordre k et Γ un sous-groupe discret cocompact de G .

La variété $X = G/\Gamma$ est appelée une *nilvariété d'ordre k* .

Fixons $t \in G$ et soit $T: X \rightarrow X$ l'application $x \mapsto t \cdot x$, où $(g, x) \mapsto g \cdot x$ est l'action à gauche de G sur X . Alors (X, T) est appelé un *nilsystème d'ordre k* .

On rappelle qu'un nilsystème est minimal dès qu'il est transitif.

Un nilsystème d'ordre 1 est une rotation sur un groupe abélien compact. Nous ne considérons ici que les nilsystèmes d'ordre 2, la généralisation de nos résultats à l'ordre supérieur restant une question ouverte.

Contrairement à la famille des rotations minimales, la famille des nilsystèmes minimaux d'ordre deux n'est pas stable par limite projective (voir [Ru]). Il est donc naturel de considérer la classe plus large des systèmes qui sont des *limites projectives de nilsystèmes minimaux d'ordre deux*.

Le résultat principal de cet article (théorème 2) est la caractérisation des limites projectives de nilsystèmes minimaux d'ordre deux au moyen d'une nouvelle relation, la *relation de bi-proximalité régionale* introduite dans la section 2.1 : Cette relation est l'égalité si et seulement si le système est (isomorphe à) une limite projective de nilsystème d'ordre deux.

1.2. Application aux nilsuites. La notion de *nilsuite* (section 8.1) est une généralisation naturelle de celle de suite presque-périodique, obtenue en remplaçant les groupes abéliens par des groupes nilpotents. Ces suites ont été d'abord introduites en théorie ergodique pour dans l'étude des corrélations multiples ([BHK]) et elles ont été ensuite utilisées en théorie des nombres pour l'étude des configurations apparaissant dans les nombres premiers ([GT1, GT2]).

Dans la section 8 nous utilisons notre résultat principal pour donner une caractérisation des nilsuites d'ordre deux en termes de régularité arithmétique. Nous pensons que cette caractérisation pourrait avoir des applications en dehors de la dynamique. Au passage nous donnons aussi une caractérisation des suites presque périodiques, facile à montrer directement mais apparemment nouvelle.

1.3. Facteur équivariant maximal et nilfacteur d'ordre deux maximal.

En topologie dynamique, les quotients sont appelés des facteurs. Nous en rappelons la définition.

Définition 2. Soit (X, T) un système. Un *facteur* de ce système est la donnée d'un système (Y, S) et d'une application $p: X \rightarrow Y$, continue, surjective et vérifiant $S \circ p = p \circ T$.

Par abus de langage, on dit brièvement que Y est un facteur de X et l'application p est appelée l'*application facteur*.

Remarquons que tout facteur d'un système minimal est minimal et que tout facteur d'un système minimal équivariant est équivariant.

Soit désormais (X, T) un système minimal. Les facteurs de X sont (partiellement) ordonnés de façon naturelle : Si Y est un facteur de X et si Z est un facteur de Y alors Z est un facteur de X et on dit alors que le facteur Y est *plus grand* ou *au dessus* du facteur Z de X .

La famille des facteurs de X qui sont équivariants est projective. Comme une limite projective de systèmes équivariants est un système équivariant, cette famille a un plus grand élément, le *facteur équivariant maximal*. Cette notion est l'analogue en topologie dynamique ce celle de *facteur de Kronecker* en théorie ergodique.

Notation. Nous notons désormais Z ou Z_X le facteur équivariant maximal de (X, T) et $\pi: X \rightarrow Z$ ou $\pi_X: X \rightarrow Z_X$ l'application facteur.

Le facteur équivariant maximal est déterminé par la relation de proximalité régionale : Cette relation est une relation d'équivalence fermée et invariante et Z est le quotient de X par cette relation ([Au]).

Considérons maintenant la famille des facteurs de X qui sont des nilsystèmes d'ordre 2. Cette famille est projective (proposition 8), mais n'est pas stable par limite projective.

Définition 3. Le *nilfacteur d'ordre 2 maximal* de X est le plus grand facteur de X qui est (isomorphe à) une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2.

Notation. Nous notons désormais Z_2 ou $Z_{X,2}$ le nilfacteur d'ordre 2 maximal de (X, T) et π_2 ou $\pi_{X,2}$ l'application quotient.

Ainsi, Z_2 est caractérisé par les deux propriétés :

- i) Z_2 est un facteur de X qui est isomorphe à une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2 et
- ii) Tout facteur de X qui est isomorphe à un nilsystème d'ordre 2 est un facteur de Z_2 .

La notion de nilfacteur d'ordre 2 maximal est l'analogue en topologie dynamique de l'*algèbre de Conze-Lesigne* construite dans [CL1] et [CL2] puis dans [HK1] où elle est notée Z_2 .

Nous ne savons pas si en général le nilfacteur d'ordre 2 maximal est le quotient de X par la relation de bi-proximalité régionale, ni même si cette relation est d'équivalence. Cependant ces propriétés sont vraies (théorème 3) pour une classe importante de systèmes, les *systèmes distaux* dont la définition est rappelée dans la section 3.4.

1.4. Parallélogrammes et parallélépipèdes dynamiques. Soit (X, T) un système minimal. Dans la section 2.2 nous construisons un sous-ensemble P de X^4 et un sous-ensemble Q de X^8 , appelés respectivement *l'ensemble des parallélogrammes* et *l'ensemble des parallélépipèdes* de X . Ces sous-ensembles vérifient une partie importante des propriétés stipulées dans les définitions de [HK2] d'une structure de parallélogrammes et d'une structure de parallélépipèdes, mais apparemment pas toutes. La principale propriété manquante est la « transitivité » : Les huit points obtenus en accolant deux parallélépipèdes le long d'une face commune ne semblent pas en général former un parallélépipède.

Cependant nous montrons (section 4) que dans le cas d'un système distal, (P, Q) est une structure de parallélépipèdes au sens de [HK2]. Cela permet d'utiliser dans ce cas tous les résultats de cet article. Pour traiter le cas général il suffit alors de remarquer (proposition 3) que si la relation de bi-proximalité régionale est triviale alors le système est distal.

1.5. Les démonstrations s'inspirent de la construction de l'algèbre de Conze-Lesigne dans [HK1]. Cependant les méthodes sont très différentes, aucun des outils de base de la construction ergodique (espérance conditionnelle, cocycles, équations fonctionnelles, seminormes, ...) n'ayant d'analogue en topologie dynamique.

Les outils « algébriques » de [HK2] remplacent ici ces notions ergodiques, malgré la difficulté causée par le fait que Q n'est pas une vraie structure de parallélépipèdes.

Il est naturel d'essayer d'étendre nos résultats aux ordres supérieurs : pour tout système minimal (X, T) et pour chaque $k \geq 2$ on peut définir une relation de régionalement proximale d'ordre k sur X et un nilfacteur d'ordre k maximal de X . On peut conjecturer qu'un système est une limite projective de nilsystèmes d'ordre k si et seulement si la relation d'ordre k est l'égalité. Pour attaquer ce problème il faudrait d'abord généraliser les résultats algébriques de [HK2] à l'ordre supérieur. Une des principales difficultés techniques est la même que dans le cadre de la théorie ergodique : Les systèmes à considérer à un niveau k ne sont pas seulement les nilsystèmes d'ordre k mais les limites projectives de tels systèmes, ce qui rend les récurrences beaucoup plus difficiles à mettre en œuvre.

Par ailleurs, on peut se demander si la méthode de cet article ne pourrait pas de produire une démonstration alternative et plus simple des résultats de [HK2].

2. RÉSULTATS

Dans ce qui suit, (X, T) est un système. X est muni d'une distance notée d ; pour $x \in X$ et $\epsilon > 0$, $B(x, \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ .

2.1. La relation de double proximalité régionale. Rappelons la définition de la relation de proximalité régionale, étudiée par Auslander dans [Au].

Définition 4. Deux points $x, y \in X$ sont *régionalement proximaux* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x', y' \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec

$$d(x', x) < \epsilon ; d(y', y) < \epsilon \text{ et } d(T^n x', T^n y') < \epsilon .$$

On note **RP** cette relation et également son graphe, c'est à dire l'ensemble des couples $(x, y) \in X^2$ tels que x et y soient régionalement proximaux. En cas d'ambiguïté on note **RP**(X) au lieu de **RP**.

On a :

Théoreme 1 ([Au], chapitre 9). *Supposons que le système (X, T) est minimal. Alors la relation de proximalité régionale est une relation d'équivalence fermée sur X et le quotient de X par cette relation est le facteur équivariant maximal de X .*

En particulier, un système minimal est équivariant si et seulement si la relation de proximalité régionale est l'égalité.

Nous définissons :

Définition 5. Deux points $x, y \in X$ sont *doublement régionalement proximaux* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x', y' \in X$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ avec

$$\begin{aligned} d(x', x) < \epsilon ; d(y', y) < \epsilon ; \\ d(T^m x', T^m y') < \epsilon ; d(T^n x', T^n y') < \epsilon \text{ et } d(T^{m+n} x', T^{m+n} y') < \epsilon . \end{aligned}$$

On note \mathbf{RP}^2 (ou $\mathbf{RP}^2(X)$) cette relation et également son graphe.

On remarque immédiatement que cette relation est fermée et plus fine que la relation de proximalité régionale (c'est à dire que \mathbf{RP}^2 est inclus dans \mathbf{RP}).

Notre résultat principal est :

Théoreme 2. *Supposons que le système (X, T) est transitif. Alors (X, T) est une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2 si et seulement si la relation de double proximalité régionale est l'égalité.*

La plus grande partie de cet article est consacrée à la démonstration de ce théorème, qui s'achève dans la section 7.

Il est commode d'introduire une variante dissymétrique de la relation \mathbf{RP}^2 .

Définition 6. Soient $x, y \in X$. On dit que ces points sont *fortement doublement régionalement proximaux* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x', y' \in X$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ avec

$$\begin{aligned} d(x', x) < \epsilon ; d(y', y) < \epsilon ; \\ d(T^m x', y) < \epsilon ; d(T^n x', y) < \epsilon ; d(T^{m+n} x', y) < \epsilon \\ d(T^m y', y) < \epsilon ; d(T^n y', y) < \epsilon \text{ et } d(T^{m+n} y', y) < \epsilon . \end{aligned}$$

On note \mathbf{RP}_s^2 (ou $\mathbf{RP}_s^2(X)$) cette relation et également son graphe.

La relation \mathbf{RP}_s^2 est clairement plus fine que la relation \mathbf{RP}^2 . Cependant, on peut remplacer la relation \mathbf{RP}^2 par la relation \mathbf{RP}_s^2 dans le théorème 2. En effet, dans la section 4.3 nous montrons :

Proposition 1. *Soit (X, T) un système transitif. Alors la relation \mathbf{RP}_s^2 est l'égalité si et seulement si la relation \mathbf{RP}^2 est l'égalité.*

Théoreme 3. *Supposons que le système (X, T) est distal et transitif (et donc minimal, voir la proposition 2). Alors la relation de bi-proximalité régionale sur X est une relation d'équivalence fermée et le quotient de X par cette relation est le nilfacteur d'ordre deux maximal de X .*

De plus, la relation \mathbf{RP}_s^2 coïncide avec la relation \mathbf{RP}^2 .

Une partie de ce théorème est montrée dans la section 4.3, le reste étant déduit du théorème 2 dans la section 5.3.

2.2. Parallélogrammes et parallélépipèdes dynamiques. Les relations de proximalité simple et double sont liées à certains sous-ensembles de X^4 et de X^8 que nous introduisons maintenant.

Définition 7. L'ensemble des parallélogrammes P de X est l'adhérence dans X^4 de l'ensemble

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{m+n} x) ; x \in X, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

L'ensemble des parallélépipèdes Q de X est l'adhérence dans X^8 de l'ensemble

$$\{(x, T^m x, T^n x, T^{m+n} x, T^p x, T^{m+p} x, T^{n+p} x, T^{m+n+p} x) ; x \in X, m, n, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Si nécessaire on note $P(X)$ et $Q(X)$ au lieu de P et Q , respectivement.

Les relations \mathbf{RP} , \mathbf{RP}^2 et \mathbf{RP}_s^2 sont liées aux ensembles P et Q par le lemme facile suivant.

Lemme 1. Supposons que (X, T) est transitif et soient $x, y \in X$.

- i) $(x, y) \in \mathbf{RP}$ si et seulement si il existe $a \in X$ avec $(x, y, a, a) \in P$.
- ii) $(x, y) \in \mathbf{RP}^2$ si et seulement si il existe $a, b, c \in X$ avec $(x, y, a, a, b, b, c, c) \in Q$.
- iii) $(x, y) \in \mathbf{RP}_s^2$ si et seulement si $(x, y, y, y, y, y, y, y) \in Q$.

Remarque. Si le système est minimal on montre facilement que lorsque x, y sont régionalement proximaux on a $(x, y, a, a) \in P$ pour tout $a \in X$.

Démonstration. Nous montrons seulement la deuxième affirmation, les preuves des deux autres étant similaires et plus simples.

S'il existe a, b, c tels que $(x, y, a, a, b, b, c, c) \in Q$, les définitions entraînent immédiatement que $(x, y) \in \mathbf{RP}^2$.

Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbf{RP}^2$. Pour tout entier $i \geq 1$ soient x'_i, y'_i, m_i et n_i comme dans la définition 5 où on a pris $\epsilon = 1/i$.

Soit $u \in X$ un point d'orbite dense. Pour tout i , par densité de $\{T^k u ; k \in \mathbb{Z}\}$ et par continuité des applications T^{m_i}, T^{n_i} et $T^{m_i+n_i}$ il existe deux entiers k_i et ℓ_i avec

$$\begin{aligned} d(T^{k_i} u, x) &< 2/i ; \quad d(T^{\ell_i} u, y) < 2/i ; \quad d(T^{k_i+m_i} u, T^{\ell_i+m_i} u) < 2/i ; \\ d(T^{k_i+n_i} u, T^{\ell_i+n_i} u) &< 2/i \text{ et } d(T^{k_i+m_i+n_i} u, T^{\ell_i+m_i+n_i} u) < 2/i . \end{aligned}$$

En passant à des sous-suites nous pouvons supposer qu'il existe $a, b, c \in X$ tels que, quand $i \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} T^{k_i+m_i} u &\rightarrow a, \quad T^{k_i+n_i} u \rightarrow b \text{ et } T^{k_i+m_i+n_i} u \rightarrow c \\ \text{d'où } T^{\ell_i+m_i} u &\rightarrow a, \quad T^{\ell_i+n_i} u \rightarrow b \text{ et } T^{\ell_i+m_i+n_i} u \rightarrow c . \end{aligned}$$

Pour tout i , en posant $p_i = \ell_i - k_i$ nous remarquons que

$$(T^{k_i} u, T^{k_i+m_i} u, T^{k_i+n_i} u, T^{k_i+m_i+n_i} u, T^{\ell_i} u, T^{\ell_i+m_i} u, T^{\ell_i+n_i} u, T^{\ell_i+m_i+n_i} u) \in Q$$

et, comme Q est fermé dans X^8 , nous avons $(x, y, a, a, b, b, c, c) \in Q$. \square

2.3. Deux exemples. Des exemples plus significatifs (systèmes distaux, nilsystèmes d'ordre 2) seront étudiés dans les sections suivantes.

2.3.1. *Rotations minimales.* Soit (X, T) une rotation minimale. On rappelle que X est un groupe abélien compact et que T est la multiplication par une constante. On vérifie directement sur les définitions que P et Q concident avec les ensembles de parallélogrammes et parallélépipèdes définis dans les sections 2.3 et 3.5 de [HK2] :

$$P = \{(x, sx, tx, stx) ; x, s, t \in X\} ;$$

$$Q = \{(x, sx, tx, stx, ux, sux, stx, stux) ; x, s, t, u \in X\} .$$

2.3.2. *Systèmes faiblement mélangeants.* On rappelle qu'un système minimal (X, T) est *faiblement mélangeant* si son carré cartésien est transitif et il s'ensuit que toute puissance cartésienne de (X, T) est transitive. On en déduit que, pour tout $k \geq 1$, tout ouvert non vide de X^k invariant par $T \times \cdots \times T$ est dense dans X^k .

Montrons que $P = X^4$. Il suffit de montrer que quelque soient les ouverts non vides U_0, \dots, U_3 de X il existe un parallélogramme dans $U_0 \times \cdots \times U_3$. Comme X est faiblement mélangeant il existe un entier n tel que $(T \times T)^n(U_0 \times U_1) \cap (U_2 \times U_3) \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in U_0$ et $y \in U_1$ avec $T^n x \in U_2$ et $T^n y \in U_3$. Par continuité de T^n et minimalité, il existe un entier m avec $T^m x \in U_1$ et $T^{m+n} x \in U_3$. Ainsi, $(x, T^m x, T^n x, T^{m+n} x)$ appartient à $P \cap (U_0 \times \cdots \times U_3)$ qui est donc non vide. Notre affirmation est démontrée.

Montrons maintenant que $Q = X^8$. Soient U_0, \dots, U_7 huit ouverts non vides de X . Il existe un entier p tel que $T^p U_i \cap U_{i+4} \neq \emptyset$ pour $0 \leq i \leq 3$. D'après ce qui précède il existe $x \in X$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $x \in U_0 \cap T^{-p} U_4, \dots, T^{m+n} x \in U_3 \cap T^{-p} U_7$. On obtient ainsi un parallélépipède dans $U_0 \times \cdots \times U_7$, et notre affirmation est démontrée.

D'après le lemme 1, les relations $\mathbf{RP}, \mathbf{RP}^2$ et \mathbf{RP}_s^2 sont toutes triviales (leur graphe est $X \times X$).

2.4. **Quelques questions ouvertes.** Nous ne savons pas si dans le cas général la relation de double proximalité régionale est une relation d'équivalence, ni si le quotient de X par cette relation est le nilfacteur d'ordre deux maximal. Ces questions seraient plus faciles à résoudre si on pouvait montrer que cette relation passe bien aux facteurs (voir la remarque après le lemme 4).

Nous ne savons pas non plus si l'ensemble P est lié de façon simple au facteur équicontinu maximal (voir la remarque après le lemme 3). On remarque facilement que P et Q vérifient une grande partie des propriétés de structures de parallélogrammes et parallélépipèdes définies dans [HK2], au moins dans le cas où le système est minimal. Cependant, nous ne savons pas si dans le cas général P et Q vérifient les propriétés de « transitivité », ni non plus si Q vérifie en général la propriété de « fermeture des parallélépipèdes » introduites dans [HK2].

Cependant toutes ces propriétés sont satisfaites dans le cas des systèmes distaux (voir la définition dans la section 3.4), ce qui permet d'appliquer dans ce cas les résultats de [HK2].

3. PRÉLIMINAIRES

3.1. **Quelques propriétés de P et de Q .** Le lemme suivant est une application immédiate des définitions. Les termes « permutation euclidienne » et « face » sont définis dans [HK2].

Lemme 2.

- i) P est invariant sous les permutations euclidiennes du carré.

- ii) \mathbf{Q} est invariant sous les permutations euclidiennes du cube.
- iii) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{P}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbf{Q}$.
- iv) Si $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{Q}$, toute face de $\underline{\mathbf{x}}$ appartient à \mathbf{P} .

Si de plus (X, T) est minimal nous avons :

- i) Pour tout $a, b \in X$, $(a, b, a, b) \in \mathbf{P}$.
- ii) Soient $x_0, x_1, x_2 \in X$. Il existe $x_3 \in X$ avec $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{P}$.

Lemme 3. Supposons que le système (X, T) est minimal. On rappelle que $\pi: X \rightarrow Z$ est la projection sur le facteur équicontinu maximal. Pour tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{P}$ on a $\pi(x_0)\pi(x_1)^{-1}\pi(x_2)^{-1}\pi(x_3) = 1$.

Remarque. Nous ne savons pas si la réciproque de ce lemme est vraie en général.

Démonstration. En effet, cette propriété est vraie lorsque $\mathbf{x} = (x, T^m x, T^n x, T^{m+n} x)$ pour un certain $x \in X$ et certains $m, n \in \mathbb{Z}$. Elle est donc vraie pour tout parallélogramme par densité. \square

Lemme 4. Soient (Y, S) un facteur de (X, T) et $\phi: X \rightarrow Y$ l'application facteur. Alors :

- i) $\mathbf{P}(Y)$ est l'image de $\mathbf{P}(X)$ par l'application $\phi^{[2]} := \phi \times \phi \times \phi \times \phi: X^4 \rightarrow Y^4$;
- ii) $\mathbf{Q}(Y)$ est l'image de $\mathbf{Q}(X)$ par l'application $\phi^{[3]} := \phi \times \dots \times \phi: X^8 \rightarrow Y^8$;
- iii) Si $x, y \in X$ sont régionalement proximaux alors $\phi(x)$ et $\phi(y)$ sont régionalement proximaux ;
- iv) si $x, y \in X$ sont bi-régionalement proximaux (resp. fortement bi-régionalement proximaux) alors $\phi(x)$ et $\phi(y)$ sont bi-régionalement proximaux (resp. fortement bi-régionalement proximaux).

Remarque. En fait, on peut montrer que $\mathbf{RP}(Y)$ est l'image de $\mathbf{RP}(X)$ par l'application $\phi \times \phi$. Nous ne savons pas si la propriété analogue est vraie pour la relation de bi-proximalité régionale.

Démonstration. Les deux premières affirmations sont immédiates d'après les définitions. Les deux suivantes s'en déduisent immédiatement grâce au lemme 1. \square

3.2. Compléments sur la relation de proximalité régionale. Le résultat suivant apparaît dans [Au] comme un corollaire de la démonstration du théorème 1.

Corollaire ([Au], Chapitre 9, corollaire 10). Supposons que le système (X, T) est minimal. Soit $(x, y) \in \mathbf{RP}$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x' \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec

$$d(x', x) < \epsilon, \quad d(T^n x', x) < \epsilon \quad \text{et} \quad d(T^n y, x) < \epsilon.$$

On en déduit facilement :

Corollaire 1. Supposons que le système (X, T) est minimal. Soient $(x, y) \in \mathbf{RP}$. Pour tout $\epsilon > 0$ et toute famille finie (z_1, \dots, z_k) de points de X il existe $z'_1, \dots, z'_k \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec

$$d(T^n y, x) < \epsilon \quad \text{et, pour tout } i \in \{1, \dots, k\}, \quad d(z'_i, z_i) < \epsilon \quad \text{et} \quad d(T^n z'_i, z_i) < \epsilon$$

Démonstration. Par minimalité, il existe pour tout i un entier k_i avec $x \in T^{k_i} B(z_i, \epsilon)$. Choisissons δ avec $0 < \delta < \epsilon$ et $B(x, \delta) \subset T^{k_i} B(z_i, \epsilon)$ pour tout i . D'après le corollaire précédent, il existe $x' \in B(x, \delta)$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec $d(T^n y, x) < \epsilon$ et $d(T^n x', x) < \delta$. L'entier n et les points $z'_i = T^{-k_i} x'$ vérifient la condition de l'énoncé. \square

3.3. Couples proximaux, systèmes distaux. Nous rappelons la définition et les premières propriétés des systèmes distaux.

Définition 8. Soit (X, T) un système. On dit que le couple $(x, y) \in X \times X$ est *distal* si

$$\inf_{n \in \mathbb{Z}} d(T^n x, T^n y) > 0$$

et dans le cas contraire on dit que (x, y) est *proximal*.

On dit que le système (X, T) est *distal* si tout couple $(x, y) \in X \times X$ avec $x \neq y$ est distal.

Proposition 2 ([Au], chapitres 5 et 7).

- i) *Le produit cartésien d'une famille finie de systèmes distaux est un système distal.*
- ii) *(X, T) est un système distal et si Y est un sous-ensemble fermé de X invariant par T , alors (Y, T) est distal.*
- iii) *Si un système est distal et transitif alors il est minimal.*
- iv) *Tout facteur d'un système distal est distal.*
- v) *Soient (X, T) un système distal et $p: X \rightarrow Y$ un facteur. Supposons que Y est minimal. Alors p est une application ouverte.*

La propriété v) est démontrée dans [Au] (chapitre 7, théorème 3) sous l'hypothèse supplémentaire que X est minimal, mais il est très facile d'en déduire le cas général.

Démonstration. Soient $x \in X$ et V un voisinage de x dans X . Nous devons montrer que $p(V)$ est un voisinage de $p(x)$ dans Y .

Soit X' l'orbite fermée de x dans X . Muni de la restriction de T , X' est un système distal et transitif, donc minimal d'après iii). La restriction de p à X' est un facteur. Ainsi, $p(V \cap X')$ est un voisinage de $p(x)$ dans Y , donc également $p(V)$. \square

Proposition 3. *Soit (X, T) un système transitif tel que la relation \mathbf{RP}_s^2 soit l'égalité. Alors ce système est distal et minimal.*

La conclusion reste clairement valable si on suppose que l'une des relations \mathbf{RP} ou \mathbf{RP}^2 est l'égalité, puisque ces deux relations sont moins fines que la relation \mathbf{RP}_s^2 . Pour montrer le théorème 2 on peut donc sans perdre en généralité se restreindre au cas des systèmes distaux minimaux.

Nous commençons par un lemme.

Lemme 5. *Soient (X, T) un système et (x, y) un couple proximal. Supposons que l'orbite fermée de y est minimale sous la transformation T . Alors $(x, y) \in \mathbf{RP}_s^2$.*

Remarque. Un point dont l'orbite fermée est minimale est appelé « almost periodic » dans [Au], mais nous préférons éviter ce terme à cause du risque de confusion avec la notion de « suite presque périodique » considérée dans la section 8.

Démonstration du lemme 5. Par hypothèse il existe une suite d'entiers (k_i) telle que $d(T^{k_i} x, T^{k_i} y) \rightarrow 0$. Quitte à remplacer cette suite par une sous-suite on peut supposer que les suites $(T^{k_i} x)$ et $(T^{k_i} y)$ convergent toutes deux vers le même point $z \in X$. Comme z appartient à l'orbite fermée de y et que cette orbite est minimale, y appartient à l'orbite fermée de z .

Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier ℓ avec $d(T^\ell z, y) < \epsilon/3$. Par continuité de T^ℓ , en posant $m = k_i + \ell$ pour i assez grand, on a

$$d(T^m x, y) < \epsilon/2 \text{ et } d(T^m y, y) < \epsilon/2 .$$

Choisissons δ avec $0 < \delta < \epsilon$ tel que $d(T^m w, T^m y) < \epsilon/2$ pour tout $w \in B(y, \delta)$. En procédant comme précédemment on obtient un entier n tel que

$$\begin{aligned} & d(T^n x, y) < \delta \text{ et } d(T^n y, y) < \delta \\ \text{d'où} \quad & d(T^{m+n} x, T^m y) < \epsilon/2 \text{ et } d(T^{m+n} y, T^m y) < \epsilon/2 \\ \text{et enfin} \quad & d(T^{m+n} x, y) < \epsilon \text{ et } d(T^{m+n} y, y) < \epsilon \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Démonstration de la proposition 3. Comme (X, T) est transitif, il existe un point $x \in X$ dont l'orbite est dense. D'après le théorème 10 du chapitre 6 de [Au] il existe un point $y \in X$ dont l'orbite fermée soit minimale et tel que (x, y) soit un couple proximal. D'après le lemme 5, $(x, y) \in \mathbf{RP}_s^2$ donc $x = y$ par hypothèse. L'orbite fermée de y est donc égale à X et (X, T) est minimal.

Soit maintenant (w, z) un couple proximal. Comme X est minimal, l'orbite fermée de z est égale à X et est minimale sous T . Le lemme 5 entraîne que $(w, z) \in \mathbf{RP}_s^2$ et on a donc $w = z$ par hypothèse. Le système (X, T) est donc distal. \square

3.4. Systèmes distaux avec plusieurs transformations. Nous aurons besoin de nous placer dans un cadre plus général que celui considéré jusqu'ici.

Soient X un espace compact muni d'une distance d , $k \geq 1$ un entier et T_1, \dots, T_k des homéomorphismes de X qui commutent entre eux. Ces transformations induisent une action de \mathbb{Z}^k sur X par homéomorphismes :

$$\text{pour } \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k \text{ on note } T^{\mathbf{n}} = T_1^{n_1} \dots T_k^{n_k} .$$

Le compact X muni des transformations T_1, \dots, T_k sera appelé un \mathbb{Z}^k -système, ou simplement un système.

Le système (X, T_1, \dots, T_k) est dit transitif s'il existe au moins un point $x \in X$ dont l'orbite $\{T^{\mathbf{n}} x ; \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k\}$ est dense dans X , et il est dit minimal si l'orbite de tout point est dense.

Un *facteur* de (X, T_1, \dots, T_k) est un la donnée d'un système (Y, S_1, \dots, S_k) et d'une application $p: X \rightarrow Y$, continue et surjective, telle que $p \circ T_i = S_i \circ p$ pour $1 \leq i \leq k$.

Les définitions de la section 3.3 s'étendent sans modification autre que de notations :

Soit $(x, y) \in X \times X$. On dit que le couple (x, y) est *distal* si

$$\inf_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} d(T^{\mathbf{n}} x, T^{\mathbf{n}} y) > 0$$

et dans le cas contraire on dit que (x, y) est *proximal*. On dit que le système (X, T_1, \dots, T_k) est *distal* si tout couple $(x, y) \in X \times X$ avec $x \neq y$ est distal.

Proposition 4 ([Au], chapitres 5 et 7). *Les résultats de la proposition 2 sont valables pour les \mathbb{Z}^k -systèmes.*

3.5. Premières propriétés de \mathbf{P} et \mathbf{Q} dans un système minimal distal.

Notations. Soit (X, T) un système. On note $T^{[2]}, T_1^{[2]}$ et $T_2^{[2]}$ les transformations de X^4 données par :

$$\begin{aligned} \text{pour } \mathbf{x} &= (x_0, x_1, x_2, x_3), \\ T^{[2]}\mathbf{x} &= (Tx_0, Tx_1, Tx_2, Tx_3) ; \\ T_1^{[2]}\mathbf{x} &= (x_0, x_1, Tx_2, Tx_3) ; \\ T_2^{[2]}\mathbf{x} &= (x_0, Tx_1, x_2, Tx_3) . \end{aligned}$$

On note $T^{[3]}, T_1^{[3]}, T_2^{[3]}$ et $T_3^{[3]}$ les transformations de X^8 données par :

$$\begin{aligned} T^{[3]}\mathbf{x} &= (Tx_0, Tx_1, Tx_2, Tx_3, Tx_4, Tx_5, Tx_6, Tx_7) ; \\ T_1^{[3]}\mathbf{x} &= (x_0, x_1, x_2, x_3, Tx_4, Tx_5, Tx_6, Tx_7) ; \\ T_2^{[3]}\mathbf{x} &= (x_0, x_1, Tx_2, Tx_3, x_4, x_5, Tx_6, Tx_7) ; \\ T_3^{[3]}\mathbf{x} &= (x_0, Tx_1, x_2, Tx_3, x_4, Tx_5, x_6, Tx_7) . \end{aligned}$$

Par construction, \mathbf{P} est invariant par les transformations $T^{[2]}, T_1^{[2]}$ et $T_2^{[2]}$, et \mathbf{Q} est invariant par les transformations $T^{[3]}, T_1^{[3]}, T_2^{[3]}$ et $T_3^{[3]}$.

Lemme 6. *Soit (X, T) un système distal minimal. Alors $(\mathbf{P}, T^{[2]}, T_1^{[2]}, T_2^{[2]})$ et $(\mathbf{Q}, T^{[3]}, T_1^{[3]}, T_2^{[3]}, T_3^{[3]})$ sont des systèmes distaux et minimaux.*

Démonstration. Nous montrons seulement la deuxième affirmation.

Comme (X, T) est distal, il est immédiat que X^8 muni des transformations $T^{[3]}, T_1^{[3]}, T_2^{[3]}$ et $T_3^{[3]}$ est distal. Comme \mathbf{Q} est un fermé de X^8 invariant par ces transformations, $(\mathbf{Q}, T^{[3]}, T_1^{[3]}, T_2^{[3]}, T_3^{[3]})$ est distal. Pour montrer que ce système est minimal il suffit donc de montrer qu'il est transitif.

Soit $z \in X$ et posons $\mathbf{z} = (z, z, \dots, z) \in X^8$. Par définition, $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$. Nous montrons que l'orbite de \mathbf{z} est dense dans \mathbf{Q} .

Soit $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_7) \in \mathbf{Q}$ et $\epsilon > 0$. Par construction, il existe $x \in X$ et des entiers m, n, p tels que chaque sommet de \mathbf{x} soit à une distance $< \epsilon/2$ du sommet correspondant de $(x, T^m x, T^n x, \dots, T^{m+n+p} x)$. Par minimalité et continuité des applications T^m, T^n et T^{m+n} , il existe un entier k tel que $T^k z$ soit suffisamment voisin de x pour que

$$d(T^k z, x_0) < \epsilon, \quad d(T^{k+m} z, x_1) < \epsilon, \quad d(T^{k+n} z, x_2) < \epsilon, \quad \dots, \quad d(T^{k+m+n+p} z, x_7) < \epsilon .$$

Ainsi, chaque sommet de $T^{[3]k} T_1^{[3]m} T_2^{[3]n} T_3^{[3]p} \mathbf{z}$ est à une distance $< \epsilon$ du sommet correspondant de \mathbf{x} □

4. LE CAS DES SYSTÈMES DISTAUX

Nous continuons ici l'étude des parallélogrammes et parallélépipèdes dans les systèmes distaux, le résultat principal étant le théorème 5 qui permet d'utiliser dans la suite la machinerie développée dans [HK2].

Dans toute cette section, (X, T) est un système minimal distal. On rappelle que $\pi: X \rightarrow Z$ est le facteur équivariant maximal de X .

4.1. Parallélogrammes dans un système distal.

Théoreme 4. Soit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in X^4$.

i) Pour que \mathbf{x} appartienne à \mathbf{P} il faut et il suffit que

$$\pi(x_0)\pi(x_1)^{-1}\pi(x_2)^{-1}\pi(x_3) = 1 .$$

ii) Pour que \mathbf{x} appartienne à \mathbf{P} il faut et il suffit qu'il existe deux suites d'entiers (m_i) et (n_i) avec

$$T^{m_i}x_0 \rightarrow x_1, T^{n_i}x_0 \rightarrow x_2 \text{ et } T^{m_i+n_i}x_0 \rightarrow x_3 .$$

Ainsi, \mathbf{P} est la « structure de parallélogrammes » sur X associée à la projection $\pi: X \rightarrow Z$ ([HK2]).

Nous commençons par un lemme.

Lemme 7. Soient $x_0 \in X$ et K l'orbite fermée dans X^4 de (x_0, x_0, x_0, x_0) pour les transformations $T_1^{[2]}$ et $T_2^{[2]}$.

Si $(x_0, x'_1, x_2, x_3) \in K$ et si $(x'_1, x_1) \in \mathbf{RP}$ alors $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K$.

Démonstration du lemme 7. Soit $\epsilon > 0$. Notons

$$Y = \{(y_2, y_3) \in X^2 ; (x_0, x'_1, y_2, y_3) \in K\} .$$

Alors K est un fermé de $X \times X$ contenant (x_2, x_3) . Comme K est invariant par $T_2^{[2]}$, Y est invariant par $T \times T$. Munissons Y de cette transformation. Alors l'application $(y_2, y_3) \mapsto y_3$ est un facteur de $(Y, T \times T)$ dans (X, T) . D'après la proposition 4, cette application est ouverte. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

pour tout $y_3 \in B(x_3, \delta)$ il existe $y_2 \in B(x_2, \epsilon)$ avec $(x_0, x'_1, y_2, y_3) \in K$.

Comme x'_1 et x_1 sont régionalement proximaux, d'après le corollaire 1 il existe $y_3 \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec

$$d(y_3, x_3) < \delta, d(T^n y_3, x_3) < \epsilon \text{ et } d(T^n x'_1, x_1) < \epsilon .$$

D'après le choix de δ , il existe $y_2 \in X$ avec $d(y_2, x_2) < \epsilon$ et $(x_0, x'_1, y_2, y_3) \in K$. Comme K est invariant par $T_1^{[2]}$, $(x_0, T^n x'_1, y_2, T^n y_3) \in K$.

En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient que $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in K$. \square

Démonstration du théorème 4. La propriété ii) signifie que \mathbf{x} appartient à l'ensemble K introduit dans le lemme 7. Cette propriété entraîne immédiatement que \mathbf{x} appartient à \mathbf{P} , ce qui d'après le lemme 3 entraîne la propriété i).

Supposons que \mathbf{x} vérifie la propriété de i).

Choisissons deux suites d'entiers (n_i) et (k_i) telles que $T^{n_i}x_0 \rightarrow x_2$ et $T^{k_i}x_0 \rightarrow x_3$ et posons $m_i = k_i - n_i$. En remplaçant les suites par des sous-suites on peut supposer que la suite $(T^{m_i}x_0)$ converge dans X vers un point x'_1 .

Alors par construction (x_0, x'_1, x_2, x_3) appartient à l'ensemble K défini dans le lemme 7. En particulier, (x_0, x'_1, x_2, x_3) appartient à \mathbf{P} et donc $\pi(x_0)\pi(x'_1)^{-1}\pi(x_2)^{-1}\pi(x_3) = 1$. L'hypothèse entraîne alors que $\pi(x'_1) = \pi(x_1)$ et donc que $(x'_1, x_1) \in \mathbf{RP}$. D'après le lemme 7, (x_0, x_1, x_2, x_3) appartient à K . La propriété ii) est satisfaite. \square

4.2. Parallélépipèdes dans un système distal. Dans cette section nous supposons encore que (X, T) est un système minimal distal et nous montrons :

Théoreme 5. (P, Q) est une structure de parallélépipèdes sur X au sens de [HK2].

Nous identifions X^8 et $X^4 \times X^4$: pour $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in X^4$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_0, \dots, x_3, y_0, \dots, y_3) \in X^8$. Commençons par montrer :

Proposition 5. Q vérifie la « propriété de transitivité » :

Soient \mathbf{u}, \mathbf{v} et $\mathbf{w} \in P$. Si (\mathbf{u}, \mathbf{v}) et (\mathbf{v}, \mathbf{w}) appartiennent à Q alors (\mathbf{u}, \mathbf{w}) appartient à Q .

Démonstration de la proposition 5. Soit $z \in X$. Notons $\mathbf{z} = (z, z, z, z) \in X^4$ et $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = (z, z, \dots, z) \in X^8$. On a $\underline{\mathbf{z}} \in Q$. D'après le lemme 6, $(Q, T^{[3]}, T_1^{[3]}, T_2^{[3]}, T_3^{[3]})$ est minimal et donc Q est l'orbite fermée de $\underline{\mathbf{z}}$ pour ces quatre transformations.

Il existe donc quatre suites d'entiers (m_i) , (n_i) , (p_i) et (q_i) telles que

$$T_1^{[3]m_i} T_2^{[3]n_i} T_3^{[3]p_i} T^{[3]q_i} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \underline{\mathbf{z}} \text{ dans } X^8.$$

Ainsi,

$$T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]q_i} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{z} \text{ et } T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]p_i+q_i} \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{z} \text{ dans } X^4.$$

Quitte à remplacer les suites par des sous-suites, on peut supposer que la suite

$$T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]p_i+q_i} \mathbf{w}$$

converge dans X^4 vers un point $\mathbf{j} \in P$.

Pour tout i ,

$$(T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]p_i+q_i} \mathbf{v}, T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]p_i+q_i} \mathbf{w}) = T_1^{[3]m_i} T_2^{[3]n_i} T^{[3]p_i+q_i} (\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

qui appartient à Q , donc à la limite $(\mathbf{z}, \mathbf{j}) \in Q$. Par ailleurs, pour tout i ,

$$T_1^{[3]m_i} T_2^{[3]n_i} T_3^{[3]p_i} T^{[3]q_i} (\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]q_i} \mathbf{u}, T_1^{[2]m_i} T_2^{[2]n_i} T^{[2]p_i+q_i} \mathbf{w})$$

qui converge vers (\mathbf{z}, \mathbf{j}) dans X^8 . Ainsi, (\mathbf{z}, \mathbf{j}) appartient à l'orbite fermée de (\mathbf{u}, \mathbf{w}) sous les transformations $T_1^{[3]}, T_2^{[3]}, T_3^{[3]}$ et $T^{[3]}$.

Comme cette orbite est minimale, (\mathbf{u}, \mathbf{w}) appartient à l'orbite fermée de (\mathbf{z}, \mathbf{j}) sous ces transformations. Comme (\mathbf{z}, \mathbf{j}) appartient à Q , (\mathbf{u}, \mathbf{w}) appartient à Q . \square

Le théorème 5 se déduit maintenant immédiatement de la proposition suivante.

Proposition 6. Pour $(x_0, \dots, x_6) \in X^7$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) (x_0, x_1, x_2, x_3) , (x_0, x_1, x_4, x_5) et (x_0, x_2, x_4, x_6) appartiennent à P ;
- ii) il existe $x_7 \in X$ avec $(x_0, \dots, x_6, x_7) \in Q$;
- iii) Il existe trois suites d'entiers (m_i) , (n_i) et (p_i) avec $T^{m_i} x_0 \rightarrow x_1$, $T^{n_i} x_0 \rightarrow x_2$, $T^{m_i+n_i} x_0 \rightarrow x_3$, $T^{p_i} x_0 \rightarrow x_4$, $T^{m_i+p_i} x_0 \rightarrow x_5$ et $T^{n_i+p_i} x_0 \rightarrow x_6$.

Pour montrer cette proposition nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme 8. Soient $x_0 \in X$ et L l'adhérence dans X^5 de l'ensemble

$$\{(T^m x_0, T^n x_0, T^{m+n} x_0, T^p x_0, T^{p+m} x_0) ; m, n, p \in \mathbb{Z}\}.$$

Soit $(x_1, \dots, x_5) \in K$ et $x'_2, x'_4 \in X$ tels que $(x_2, x'_2) \in \mathbf{RP}$ et $(x_4, x'_4) \in \mathbf{RP}$. Alors $(x_1, x'_2, x_3, x'_4, x_5) \in L$.

Démonstration du lemme 8. Montrons que $(x_1, x'_2, x_3, x_4, x_5) \in L$. Soit $\epsilon > 0$.

Posons

$$F = \{(y_1, y_3, y_5) \in X^3 ; (y_1, x_2, y_3, x_4, y_5) \in L\} .$$

Alors F est invariant par la transformation $T \times T \times T$ et $(F, T \times T \times T)$ est distal. L'application $(y_1, y_3, y_5) \mapsto y_3$ est un facteur de ce système sur (X, T) . Cette application est donc ouverte et il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y_3 \in X$, si $d(x_3, y_3) < \delta$, il existe $y_1, y_5 \in X$ avec

$$(1) \quad d(x_1, y_1) < \epsilon, \quad d(x_5, y_5) < \epsilon \text{ et } (y_1, x_2, y_3, x_4, y_5) \in L .$$

Comme x_3 et x'_3 sont régionalement proximaux, il existe $y_3 \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ avec

$$d(x_3, y_3) < \delta, \quad d(T^n y_3, x_3) < \epsilon \text{ et } d(T^n x_2, x'_2) < \epsilon .$$

Soient y_1, y_5 vérifiant (1). Alors $(y_1, T^n x_2, T^n y_3, x_4, y_5) \in L$.

En passant à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ on obtient que $(x_1, x'_2, x_3, x_4, x_5) \in L$.

Par la même démonstration on obtient que $(x_1, x'_2, x_3, x'_4, x_5)$ appartient à L . \square

Lemme 9. Soient $x_0 \in X$ et K l'adhérence dans X^6 de l'ensemble

$$\{(T^m x_0, T^n x_0, T^{m+n} x_0, T^p x_0, T^{p+m} x_0, T^{p+n} x_0) ; m, n, p \in \mathbb{Z}\} .$$

Soit $(x_1, \dots, x_6) \in K$ et $x'_6 \in X$ tel que x_6 et x'_6 soient régionalement proximaux. Alors $(x_1, \dots, x_5, x'_6) \in K$.

Démonstration du lemme 9. Fixons $\epsilon > 0$.

Munissons X^3 des trois transformations

$$S_1 = \text{Id} \times T \times \text{Id}, \quad S_2 = \text{Id} \times \text{Id} \times T \text{ et } S_3 = T \times T \times T .$$

Alors (X^3, S_1, S_2, S_3) est distal et la minimalité de (X, T) entraîne que ce système est minimal.

D'autre part, K est invariant par les trois transformations :

$$\begin{aligned} T_1 &: (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto (Ty_1, y_2, Ty_3, y_4, Ty_5, y_6) ; \\ T_2 &: (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto (y_1, Ty_2, Ty_3, y_4, y_5, Ty_6) ; \\ T_3 &: (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto (y_1, y_2, y_3, Ty_4, Ty_5, Ty_6) . \end{aligned}$$

Le système (K, T_1, T_2, T_3) est distal et transitif donc il est minimal.

L'application $p: (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto (y_4, y_5, y_6)$ de K dans X^3 est continue et commute avec les transformations, elle est donc surjective par minimalité de X^3 , et p est ainsi une application facteur de (K, T_1, T_2, T_3) sur (X^3, S_1, S_2, S_3) . Cette application est donc ouverte. Il existe donc δ tel que pour tous $y_4, y_5 \in X$ avec

$$d(x_4, y_4) < \delta \text{ et } (x_5, y_5) < \delta$$

il existe $y_1, y_2, y_3 \in X$ avec

$$(2) \quad d(x_1, y_1) < \epsilon, \quad d(x_2, y_2) < \epsilon, \quad d(x_3, y_3) < \epsilon \text{ et } (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, x_6) \in K .$$

Comme x'_6 et x_6 sont régionalement proximaux, d'après le corollaire 1 il existe $y_4, y_5 \in X$ $n \in \mathbb{Z}$ avec

$$d(x_4, y_4) < \delta, \quad d(T^n y_4, x_4) < \epsilon, \quad d(x_5, y_5) < \delta, \quad d(T^n y_5, x_5) < \epsilon \text{ et } d(T^n x_6, x'_6) < \epsilon .$$

Soient y_1, y_2, y_3 comme dans (2). Alors $(y_1, y_2, y_3, T^n y_4, T^n y_5, T^n x_6) \in K$.

Par passage à la limite, $(x_1, \dots, x_5, x'_6) \in K$. \square

Démonstration de la proposition 6. Supposons que la propriété i) est vérifiée.

Soient (m_i) , (k_i) et (ℓ_i) trois suites d'entiers telles que $T^{m_i}x_0 \rightarrow x_1$, $T^{k_i}x_0 \rightarrow x_3$ et $T^{\ell_i}x_0 \rightarrow x_5$. Posons $n_i = k_i - m_i$ et $p_i = \ell_i - m_i$. En remplaçant les suites données par des sous-suites on peut supposer que les suites $(T^{n_i}x_0)$ et $(T^{p_i}x_0)$ convergent dans X ; soient x'_2 et x'_4 leurs limites respectives.

Par construction, $(x_1, x'_2, x_3, x'_4, x_5)$ appartient à l'ensemble L défini dans le lemme 8. En particulier, $(x_0, x_1, x'_2, x_3) \in P$, et comme (x_0, x_1, x_2, x_3) appartient aussi à P , x'_2 et x_2 sont régionalement proximaux. De même, x'_4 et x_4 sont régionalement proximaux. D'après le lemme 8, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in L$.

Soit K l'ensemble introduit dans le lemme 9. Alors L est clairement l'image de K par la projection $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \mapsto (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$. Il existe donc $x'_6 \in X$ avec $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x'_6) \in K$. Comme (x_0, x_2, x_4, x_6) et (x_0, x_2, x_4, x'_6) appartiennent à P , x_6 et x'_6 sont régionalement proximaux. D'après le lemme 9, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ appartient à K . Par définition de K , la propriété iii) est vérifiée.

Supposons la propriété iii) vérifiée et soient trois suites d'entiers (m_i) , (n_i) et (p_i) comme dans cette propriété. En remplaçant ces suites par des sous-suites on peut supposer que la suite $(T^{m_i+n_i+p_i}x_0)$ converge vers un point x_7 . On a $(x_0, \dots, x_7) \in Q$, et la propriété ii) est vérifiée.

Il est évident que la propriété ii) entraîne la propriété i). \square

4.3. Démonstration de la proposition 1 et d'une partie du théorème 3.

Soit (X, T) un système distal minimal. D'après le théorème 5, P et Q forment une structure de parallélépipèdes sur X . D'après le lemme 1, les deux relations \mathbf{RP}^2 et \mathbf{RP}_s^2 concident avec la relation \equiv_Q introduite dans la section 3.3 de [HK2]. En particulier, \mathbf{RP}^2 est une relation d'équivalence, et cette relation est clairement fermée. Dans la section 5.3 on montrera que le quotient de X par cette relation est le nilfacteur d'ordre 2 maximal, ce qui achèvera la démonstration du théorème 3.

Nous montrons maintenant la proposition 1. Si la relation \mathbf{RP}^2 est l'égalité, la relation \mathbf{RP}_s^2 qui est plus fine est également l'égalité. Soit maintenant (X, T) un système transitif et que la relation \mathbf{RP}_s^2 soit l'égalité. D'après la proposition 3, ce système est distal et minimal et d'après ce qui précède les relations \mathbf{RP}^2 et \mathbf{RP}_s^2 concident. \square

5. LE CAS DES NILSYSTEMES

5.1. Rappels. Soient $k \geq 1$ un entier et G un groupe de Lie nilpotent d'ordre k . Soient Γ , $X = G/\Gamma$, $t \in G$ et T comme dans la définition 1. Nous rappelons quelques propriétés classiques utiles dans la suite, dont la démonstration se trouve dans [AGH], [Pa] et [Le].

Proposition 7. *La famille des nilsystèmes d'ordre k est stable par passage aux facteurs et par produit cartésien.*

Théorème 6. *Soit (X, T) un nilsystème d'ordre k .*

- *(X, T) est distal. En particulier, si (X, T) est transitif alors il est minimal.*
- *Soit Y l'orbite fermée d'un point de X . Alors (Y, T) est (isomorphe à) un nilsystème d'ordre k .*

Une première réduction est utile avant d'énoncer la propriété suivante.

Soient G, Γ et t comme plus haut et supposons que le nilsystème (X, T) est minimal. Soient G_0 la composante connexe de l'élément unité de G et G_1 le sous-groupe de G engendré par G_0 et t . Alors G_1 est un sous-groupe ouvert de G et sa projection sur $X = G/\Gamma$ est un ouvert de X , invariant par T donc égal à X par minimalité. Posons $\Gamma_1 = \Gamma \cap G_1$. Alors Γ_1 est un sous-groupe discret et cocompact de G_1 et X s'identifie à G_1/Γ_1 . En remplaçant G par G_1 et Γ par Γ_1 nous pouvons ainsi nous restreindre sans perdre en généralité, au cas où G et t vérifie la propriété :

(H1) *G est engendré par la composante connexe de son élément unité et t .*

Notons G_2 le groupe des commutateurs de G . On rappelle que G_2 et $G_2\Gamma$ sont des sous-groupes fermés de G . L'hypothèse (H1) entraîne immédiatement que G_2 est connexe.

Théoreme 7 (voir [Le]). *Supposons que le nilsystème (X, T) est minimal et que l'hypothèse (H1) est vérifiée. Alors le facteur équicontinu maximal de ce système est le quotient $Z = G/G_2\Gamma$ de $X = G/\Gamma$ par l'action de G_2 .*

Une deuxième réduction sera utile dans la suite. Notons $Z(G)$ le centre de G . Alors $Z(G) \cap \Gamma$ est un sous-groupe distingué et fermé de G . En remplaçant G et Γ par leurs quotients par ce sous-groupe on se ramène sans perdre en généralité au cas où G et Γ vérifient la propriété :

(H2) *L'intersection de Γ et du centre de G est triviale.*

Notons que la propriété (H1) reste vérifiée après cette deuxième réduction.

La propriété (H2) signifie simplement que l'action par translation de G sur X est libre, c'est à dire que G peut être considéré comme un groupe de transformations de X . Elle entraîne immédiatement que Γ nilpotent d'ordre $k - 1$. En particulier, si $k = 2$ alors Γ est abélien.

Des rappels précédents on déduit facilement :

Proposition 8. *Soient (X, T) un système minimal et $k \geq 1$ un entier. Alors la famille des facteurs de X qui sont isomorphes à des nilsystèmes d'ordre k est projective.*

Démonstration. Soient $p_1: X \rightarrow X_1$ et $p_2: X \rightarrow X_2$ deux facteurs de X et supposons que X_1 et X_2 sont des nilsystèmes d'ordre k .

Soit $Y \subset X_1 \times X_2$ l'image de l'application $p_1 \times p_2: X \rightarrow X_1 \times X_2$. Alors Y est un fermé de $X_1 \times X_2$, invariant par $T_1 \times T_2$. D'après les rappels précédents, $(Y, T_1 \times T_2)$ est un nilsystème d'ordre k .

De plus, $(Y, T_1 \times T_2)$ est un facteur de (X, T) par l'application facteur $p_1 \times p_2$ et X_1, X_2 et les applications p_1, p_2 sont les composées de $p_1 \times p_2$ par les projections naturelles qui sont des applications facteur. Ainsi, Y est un facteur de X « au dessus » de X_1 et X_2 , et il est immédiat que c'est le plus petit possible. \square

5.2. La relation \mathbf{RP}^2 dans les nilsystèmes d'ordre deux. Nous nous restreignons désormais aux nilsystèmes d'ordre deux. On rappelle que le groupe G est nilpotent d'ordre 2 si et seulement si son groupe des commutateurs G_2 est inclus dans son centre $Z(G)$. Les hypothèses (H1) et (H2) entraînent que le groupe de Lie abélien G_2 est compact et connexe, c'est donc un tore de dimension finie.

Proposition 9. *Soit (X, T) un nilsystème minimal d'ordre deux. Alors la relation de bi-proximalité régionale sur X est l'identité. De plus, (P, Q) est une structure de parallélépipèdes forte sur X .*

Démonstration. Soit (X, T) un nilsystème minimal d'ordre deux. Soient G, Γ, t et T comme dans la définition 1 et supposons que les propriétés (H1) et (H2) sont vérifiées.

Soit (P_X, Q_X) la structure forte de parallélépipèdes sur X construite dans la section 3.7 de [HK2] en prenant $F = G_2$. Pour montrer la proposition, il suffit de vérifier que P_X et Q_X sont égaux aux ensembles P et Q de la définition 7.

Nous utilisons librement les notations et résultats de [HK2]. On rappelle que P_X est l'image de $G^{[2,1]}\Gamma^{[2]}$ dans $X^4 = G^{[2]}/\Gamma^{[2]}$, et que

$$P_X = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in X^4 ; \pi'(x_0)\pi'(x_1)^{-1}\pi'(x_2)^{-1}\pi'(x_3) = 1\}$$

où π' est la surjection naturelle de $X = G/\Gamma$ sur le groupe $G/G_2\Gamma$. D'après le théorème 6, $G/G_2\Gamma$ est le facteur équicontinu maximal de X et π' concide avec l'application facteur π . D'après le théorème 4, $P_X = P$.

D'autre part, on rappelle que $\Gamma^{[3,1]} = \Gamma^{[3]} \cap G^{[3,1]}$ et que Q_X est par définition l'image de $G^{[3,1]}/\Gamma^{[3,1]}$ dans $X^8 = G^{[3]}/\Gamma^{[3]}$ par l'inclusion naturelle. On vérifie facilement que $\Gamma^{[3,1]}$ est cocompact dans $G^{[3,1]}$ et on en déduit que Q_X est fermé dans X^8 .

Pour tout $x \in X$ et tous $m, n, p \in \mathbb{Z}$, $(x, T^m x, T^n x, \dots, T^{m+n+p} x)$ appartient à Q_X par définition, donc $Q \subset Q_X$. Montrons l'inclusion opposée. Soit $\underline{x} = (x_0, \dots, x_6, x_7) \in Q_X$. Alors (x_0, x_1, x_2, x_3) , (x_0, x_1, x_4, x_5) et (x_0, x_2, x_4, x_6) appartiennent à P_X donc à P . D'après la proposition 6, il existe $x'_7 \in X$ tel que $\underline{x}' = (x_0, \dots, x_6, x'_7)$ appartienne à Q . On a donc $\underline{x}' \in Q_X$, et comme (P_X, Q_X) est une structure forte de parallélépipèdes et que $\underline{x} \in Q_X$, $x'_7 = x_7$ et donc $\underline{x} \in Q$. \square

Remarque. Il est aussi possible de montrer la proposition 9 sans utiliser les résultats de la section 4 (théorème 4 et proposition 6) mais en décrivant explicitement P et Q .

Pour d'autres présentations de P_X et Q_X on pourra consulter la section 11 de [HK1] ou l'appendice E de [GT1].

Corollaire 2. *Supposons que (X, T) est une limite projective de nilsystèmes minimaux d'ordre deux. Alors la relation de bi-proximalité régionale de X est l'égalité.*

Démonstration. Soit (X_i) une famille projective de nilsystèmes d'ordre 2 dont la limite projective est X . Soient $x, y \in X$ deux points bi-régionalement proximaux; D'après le lemme 4, pour tout i les images de x et y dans X_i sont bi-régionalement proximales et donc égales d'après la proposition 9. On a donc $x = y$. \square

5.3. Démonstration du théorème 3 à partir du théorème 2. Soit (X, T) un système distal minimal. Nous avons vu que (P, Q) est une structure de parallélépipèdes sur X . D'après la section 3.3 de [HK2], la relation de bi-proximalité régionale de X est donc une relation d'équivalence sur X . Soient Y le quotient de X par cette relation et $\phi: X \rightarrow Y$ l'application quotient.

Comme la relation de bi-proximalité régionale est fermée, Y peut être muni d'une structure d'espace compact telle que ϕ soit continue et comme cette relation est invariante par T , cette transformation induit une transformation de Y , encore notée T , telle que $\phi: X \rightarrow Y$ soit un facteur.

D'après la section 3.3 de [HK2], l'image de $Q(X)$ par l'application $\phi^{[2]}$ est une structure de parallélépipèdes forte sur Y . Par ailleurs, d'après le lemme 4, cette image est égale à $Q(Y)$ qui est donc une structure forte.

On en déduit que la relation de bi-proximalité régionale de Y est l'égalité. D'après le théorème 2, Y est une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2.

Soit maintenant (W, T) un nilsystème d'ordre 2 qui est un facteur de X , l'application facteur étant notée ψ . Soient $x, y \in X$ deux points tels que $\phi(x) = \phi(y)$ et montrons que $\psi(x) = \psi(y)$.

Par définition de ϕ , x et y sont bi-régionalement proximaux et il existe $a, b, c \in X$ tels que $(x, y, a, a, b, b, c, c) \in Q(X)$. On a donc $(\psi(x), \psi(y), \psi(a), \psi(a), \psi(b), \psi(b), \psi(c), \psi(c)) \in Q(W)$ donc $\psi(x)$ et $\psi(y)$ sont bi-régionalement proximaux dans W , donc égaux d'après la proposition 9. Notre affirmation est démontrée.

Ainsi, l'application ψ se factorise à travers ϕ : tout facteur de X qui est un nilsystème d'ordre 2 est un facteur de W , qui est donc le nilfacteur d'ordre 2 maximal de X . \square

6. RÉSULTATS TOPOLOGIQUES

Dans cette section nous la débutons la démonstration du théorème 2.

Nous supposons désormais :

(Hyp.) *Le système (X, T) est transitif et la relation de bi-proximalité régionale sur X est l'égalité.*

Nous voulons démontrer que le système est une limite projective de nilsystèmes d'ordre deux. La démonstration occupe le reste de cette section et toute la section suivante. D'après la proposition 3, le système (X, T) est distal et minimal. D'après le théorème 5, (P, Q) est une structure de parallélépipèdes sur X telle qu'elle a été définie et étudiée dans [HK2], et cette structure est forte par hypothèse.

Les structures de parallélogrammes et de parallélépipèdes ont été étudiées dans cet article dans un cadre « abstrait » et nous avons ici une structure « plus riche » : D'une part, X, P, Q, \dots sont des espaces compacts. D'autre part, les parallélogrammes et parallélépipèdes de X proviennent de la dynamique. Les structures topologiques et dynamiques sont bien sûr intimement liées mais, pour la commodité de la lecture, nous séparons les deux type d'arguments et commençons par ceux de nature purement topologique.

Nous utilisons désormais librement les définitions, notations et résultats de [HK2].

6.1. Les groupes P_s et F . Nous étudions les propriétés topologiques des groupes et homomorphismes introduites dans la section 4 de [HK2]. Les démonstrations consistent essentiellement en arguments élémentaires de compacité que nous ne donnons que succinctement.

Rappelons que la classe d'un parallélogramme \mathbf{x} pour la relation d'équivalence \approx est notée $[\mathbf{x}]$ et que P est le quotient de P par cette relation.

On a $Q = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in P, \mathbf{x} \approx \mathbf{y}\}$. Ainsi, le graphe de la relation \approx est le fermé Q . On peut donc munir P d'une structure d'espace compact telle que la surjection naturelle $P \rightarrow P$ soit continue.

On définit deux applications $r, q : P \rightarrow Z$ par

$$\text{pour tout } \mathbf{x} \in P, \quad r([\mathbf{x}]) = \pi(x_1)\pi(x_0)^{-1} \text{ et } q([\mathbf{x}]) = \pi(x_2)\pi(x_0)^{-1}.$$

Ces deux applications sont continues. En particulier, pour tout $s \in Z$, le sous-ensemble $P_s = r^{-1}(\{s\})$ de P est fermé, et la restriction q_s de q à P_s est continue.

Dans la section 4.1 de [HK2] on a muni chaque ensemble P_s d'une structure de groupe abélien. Montrons :

Lemme 10. *Pour chaque $s \in Z$ la multiplication de P_s est continue. Plus précisément, soit*

$$P \times_r P = \{(\alpha, \beta) \in P \times P ; r(\alpha) = r(\beta)\} = \bigcup_{s \in Z} P_s \times P_s .$$

Soit $m: P \times_r P \rightarrow P$ l'application dont, pour tout $s \in Z$, la restriction à $P_s \times P_s$ est la multiplication. Alors m est continue.

Démonstration. Définissons

$$K = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in X^6 ; (x_0, x_1, x_2, x_3) \in P \text{ et } (x_2, x_3, x_4, x_5) \in P\} .$$

Ainsi, K est une partie fermée de X^6 et $P \times_r P$ est l'image de K par l'application

$$(x_0, x_1, x_1, x_3, x_4, x_5) \mapsto ([x_0, x_1, x_2, x_3], [x_2, x_3, x_4, x_5]) .$$

L'application m de $P \times_r P$ dans P est caractérisée par :

pour tout $(x_0, x_1, x_1, x_3, x_4, x_5) \in R$, $m([x_0, x_1, x_2, x_3], [x_2, x_3, x_4, x_5]) = [x_0, x_1, x_4, x_5]$.

Le graphe de cette application est fermé et elle est donc continue. \square

Ainsi, pour tout $s \in Z$, P_s est un groupe abélien compact et $q_s: P_s \rightarrow Z$ est un homomorphisme continu de groupes. Le noyau F_s de cet homomorphisme est donc un groupe compact.

Notons $P_{1,1}$ l'ensemble parallélogrammes verticaux, c'est à dire dont les quatre sommets ont la même projection sur Z . On rappelle que F est formé des classes d'équivalence des parallélogrammes verticaux. Ainsi, $F = F_1$ est un groupe compact.

Lemme 11. *L'action de F sur X est continue.*

Démonstration. Définissons un sous-ensemble K de $X \times X \times P_{1,1}$ par :

$$K = \{(x, y, \mathbf{z}) ; x, y \in X, \mathbf{z} \in P_{1,1}, \pi(x) = \pi(y) \text{ et } (x, x, x, y, \mathbf{z} \in Q)\} .$$

Alors K est fermé dans $X \times X \times P_{1,1}$ donc compact. Remarquons que si $(x, y, \mathbf{z}) \in K$, si $\mathbf{z}' \in P_{1,1}$ et si $[\mathbf{z}'] = [\mathbf{z}]$ alors $(x, y, \mathbf{z}') \in K$. Ainsi, K induit un sous-ensemble compact R de $X \times X \times F$.

Par définition de l'action de F sur X , pour $x \in X$ et $u \in F$, $u \cdot x$ est l'unique élément de X tel que $(x, u \cdot x, u)$ appartienne à R . Cette action est donc continue. \square

Introduisons quelques notations supplémentaires.

Notation. On note

$$L = q^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{s \in Z} F_s \subset P$$

et $j: L \rightarrow F$ l'application donnée par

$$j(\alpha) = j_s(\alpha) \text{ si } \alpha \in F_s$$

Pour chaque $s \in Z$ on note $i_s: F \rightarrow F_s$ l'application réciproque de j_s et $i: Z \times F \rightarrow L$ désigne l'application définie par $i(s, \xi) = i_s(\xi)$.

Lemme 12. *Pour tout $s \in Z$, l'isomorphisme $j_s: F_s \rightarrow F$ est continu et plus précisément l'application $j: L \rightarrow F$ est continue.*

Démonstration. Soit $P_{\cdot,1}$ l'ensemble des parallélogrammes $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ vérifiant $\pi(x_2) = \pi(x_0)$ et donc aussi $\pi(x_3) = \pi(x_1)$. Ainsi, L est l'image de $P_{\cdot,1}$ dans le quotient P de P .

Tout parallélogramme appartenant à $P_{\cdot,1}$ peut s'écrire d'une unique manière sous la forme $(a, b, u \cdot a, v \cdot b)$ avec $a, b \in X$ et $u, v \in F$ et on définit une application $j' : P_{\cdot,1} \rightarrow F$ par $j'(a, b, u \cdot a, v \cdot b) = vu^{-1}$. Cette application est continue. De plus, j est l'application induite par j' par passage au quotient, et j est donc continue. \square

Remarquons que l'application i est la réciproque de l'application $r \times j : L \rightarrow Z \times F$. On a donc :

Corollaire 3. *L'application $i : Z \times F \rightarrow L$ est continue.*

6.2. Le groupe de structure topologique.

Définition 9. Le *groupe de structure topologique* de (X, T) , noté G_{top} ou $G_{\text{top}}(X)$, est l'ensemble des homéomorphismes de X appartenant au groupe de structure G de X .

Ainsi, G_{top} est le groupe formé des homéomorphismes $x \mapsto g \cdot x$ de X tels que pour tout $\mathbf{x} \in P$ on ait $g^{[2]} \cdot \mathbf{x} \in P$ et $g^{[2]} \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}$. On rappelle que

$$\text{pour } \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in P, \quad g^{[2]} \cdot \mathbf{x} = (g \cdot x_0, g \cdot x_1, g \cdot x_2, g \cdot x_3).$$

On munit G_{top} de la topologie de la convergence uniforme sur X . Ainsi, G_{top} est un groupe polonais. Comme G_{top} est un sous-groupe de G , il est nilpotent d'ordre 2 ([HK2], proposition 12).

Proposition 10. *Le groupe G_{top} agit transitivement sur X si et seulement si, pour tout $s \in Z$ la suite exacte*

$$(2) \quad 0 \longrightarrow F \xrightarrow{i_s} P_s \xrightarrow{q_s} B \longrightarrow 0$$

se scinde continûment, c'est à dire qu'il existe un homomorphisme de groupes continu $\kappa_s : P_s \rightarrow F$ tel que $\kappa_s \circ j_s$ soit l'identité de F .

En particulier, si F est un tore de dimension finie alors G_{top} agit transitivement sur X .

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'élément de G construit dans la preuve du théorème 2 de [HK2] est un homéomorphisme de X . \square

Proposition 11. *Supposons que G_{top} agit transitivement sur X . Soit Γ_{top} le stabilisateur d'un point e de X et identifions X avec $G_{\text{top}}/\Gamma_{\text{top}}$ de la façon naturelle.*

Alors G_{top} est localement compact, Γ_{top} est un sous-groupe discret de G , et l'identification $X = G_{\text{top}}/\Gamma_{\text{top}}$ est un homéomorphisme.

Avant la démonstration de cette proposition, introduisons une notation utilisée dans toute la suite.

Notation. Si H, K sont deux groupes topologiques métrisables, $\text{hom}_c(H, K)$ désigne l'ensemble des homomorphismes continus de H dans K , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts de H .

Démonstration. Pour alléger la typographie, dans la démonstration nous écrivons G et Γ au lieu de G_{top} et Γ_{top} .

6.2.1. *Remarques préliminaires.* Comme G est un groupe transitif de transformations de X et que Γ est le stabilisateur d'un point e , l'intersection de ce groupe et du centre $\mathcal{Z}(G)$ de G est triviale. D'après la proposition 15 de [HK2], F est inclus dans $\mathcal{Z}(G)$ donc $\Gamma \cap F = \{1\}$. Dans la section 5.3 de [HK2] on montre que le groupe G_2 des commutateurs de G est inclus dans F . On a donc $\Gamma \cap G_2 = \{1\}$ et Γ est abélien.

Par définition, Γ est un sous-groupe fermé de G . Comme F agit continûment sur X , l'inclusion de F dans G est continue, et F est un sous-groupe compact de G .

6.2.2. *Première partie.* On rappelle encore ([HK2], section 5.3) qu'il existe un homomorphisme de groupes $p: G \rightarrow Z$, vérifiant

$$\text{pour tout } g \in G \text{ et tout } x \in X, p(g) \cdot \pi(x) = \pi(g \cdot x) .$$

Par définition de l'identification $X = G/\Gamma$, le point e de X est l'image dans X de l'élément unité 1 de G , donc $\pi(e)$ est l'élément unité 1 de Z . Ainsi,

$$p(g) = \pi(g \cdot e) \text{ pour tout } g \in G .$$

Le graphe de l'application p est fermé et cet homomorphisme est donc continu. Son noyau $F\Gamma$ est donc fermé dans G . Comme G et Z sont des groupes polonais et que p est surjectif, cet homomorphisme est une application ouverte et la topologie de Z concide avec la topologie quotient de $G/F\Gamma$ (voir [BK], chapitre 1).

La compacité de F entraîne alors facilement que l'application $g \mapsto g \cdot e$ est ouverte de G dans X . Ainsi, l'identification $X = G/\Gamma$ est un homéomorphisme et Γ est un sous-groupe cocompact de G .

6.2.3. *Deuxième partie.* Nous montrons maintenant que Γ est un sous-groupe discret de G .

a) Soit $\gamma \in \Gamma$. Comme G est nilpotent d'ordre 2, l'application

$$f_\gamma: g \mapsto [\gamma, g]$$

est un homomorphisme de groupes de G dans $G_2 \subset F$.

Comme l'application $(h, g) \mapsto [h, g]: G \times G \rightarrow G_2$ est continue, pour chaque $\gamma \in \Gamma$ l'homomorphisme f_γ est continu et l'application $\gamma \mapsto f_\gamma$ est continue de Γ dans $\text{hom}_c(G, F)$.

Soit $\gamma \in \Gamma$. Comme F est contenu dans le centre de G , l'homomorphisme f_γ est trivial sur F . Comme Γ est abélien, la restriction de l'homomorphisme f_γ à Γ est triviale. Ainsi, f_γ induit un homomorphisme de groupes χ_γ de $G/\Gamma F = Z$ dans F , et cet homomorphisme est continu.

On vérifie facilement que $\chi_\gamma \neq 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ différent de 1. En effet, dans le cas contraire on aurait $f_\gamma = 1$ et γ appartiendrait au centre de G ce qui contredit les remarques préliminaires.

b) Supposons que Γ n'est pas discret.

Il existe alors une suite (γ_n) dans Γ , convergeant vers 1 dans Γ et avec $\gamma_n \neq 1$ pour tout n .

On a donc $\chi_{\gamma_n} \neq 1$ pour tout n . Comme Z et F sont des groupes abéliens compacts, le groupe $\text{hom}_c(Z, F)$ est discret et la suite (χ_{γ_n}) ne peut pas converger vers 1 dans $\text{hom}_c(Z, F)$, c'est à dire uniformément sur Z .

Il existe donc une suite (z_n) dans Z telle que la suite $(\chi_{\gamma_n}(z_n))$ converge dans F vers un point $u \neq 1$. En remplaçant la suite (γ_n) par une sous-suite on se amène au cas où la suite (z_n) converge dans Z vers un certain point z . Comme p est une

application ouverte, il existe une suite (g_n) dans G avec $p(g_n) = z_n$ pour tout n et qui converge vers un point g de G avec $p(g) = z$.

Le sous-ensemble $K = \{g_n ; n \geq 1\} \cup \{g\}$ est un compact de G . Comme l'application $\gamma \mapsto f_\gamma$ est continue à valeurs dans le groupe $\text{hom}_c(G, F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, la suite $(f_{\gamma_n}(\cdot))$ converge uniformément vers 1 sur K et la suite $(f_{\gamma_n}(g_n))$ converge donc vers 1.

Comme pour tout n on a $f_{\gamma_n}(g_n) = \chi_{\gamma_n}(z_n)$ on obtient la contradiction recherchée.

6.2.4. Troisième partie. Nous montrons maintenant que G est localement compact.

Comme Γ est un sous-groupe discret de G , il existe un voisinage fermé symétrique K de 1 dans G avec $(K \cdot K \cdot K) \cap \Gamma = \{1\}$. Vérifions que K est compact. Soit (g_n) une suite dans K et montrons que cette suite admet une sous-suite convergente.

Comme X est compact, quitte à remplacer la suite donnée par un sous-suite, on peut supposer que la suite $(g_n \cdot e)$ converge dans X . Comme l'application $g \mapsto g \cdot e$ est ouverte, il existe une suite (h_n) dans G , convergente et vérifiant $h_n \cdot e = g_n \cdot e$ pour tout n . Pour tout n posons $\gamma_n = g_n^{-1} h_n$. On a $\gamma_n \in \Gamma$.

Pour tous m, n assez grands, $h_m h_n^{-1} \in K$ donc $\gamma_m \gamma_n^{-1} \in K \cdot K \cdot K$ et donc $\gamma_m = \gamma_n$. Ainsi, la suite (γ_n) est constante à partir d'un certain rang et la suite (g_n) converge. \square

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Dans cette section nous terminons la démonstration du théorème 2. Nous supposons toujours que

(Hyp.) *La relation de bi-proximalité régionale sur X est l'égalité.*

Nous commençons par une remarque préliminaire.

7.1. Passage au quotient. Soit F_0 un sous-groupe fermé de F et Y l'espace quotient de X sous l'action de F_0 .

Comme la transformation T appartient au groupe de structure de X et que F est contenu dans le centre de ce groupe, l'action de F sur X commute avec T . Ainsi T induit un homéomorphisme, encore noté T , de Y et l'application quotient $\phi: X \rightarrow Y$ est un facteur.

Lemme 13. *Soient F_0 et Y comme plus haut. Alors :*

- i) *la relation de bi-proximalité régionale sur Y est l'égalité et*
- ii) *le groupe des fibres de Y est isomorphe à F/F_0 .*

Démonstration. i) Soient $y, y' \in Y$ avec $(y, y') \in \mathbf{RP}^2(Y)$. Alors d'après le lemme 1 il existe $a, b, c \in Y$ avec $(y, y', a, a, b, b, c, c) \in \mathbf{Q}(Y)$.

D'après le lemme 4, $\mathbf{Q}(Y)$ est l'image de $\mathbf{Q}(X)$ par $\phi^{[3]}$ et il existe donc $\underline{x} = (x_0, \dots, x_7) \in \mathbf{Q}(X)$ avec

$$\phi(x_0) = y, \phi(x_1) = y', \phi(x_2) = \phi(x_3) = a, \phi(x_4) = \phi(x_5) = b \text{ et } \phi(x_6) = \phi(x_7) = c.$$

Par définition de ϕ , il existe $u, v, w \in F_0$ avec

$$x_3 = u \cdot x_2, x_5 = v \cdot x_4 \text{ et } x_7 = w \cdot x_6.$$

D'après la proposition 12 de [HK2] on a donc $x_1 = uvw^{-1} \cdot x_0$ et donc par définition de ϕ , $\phi(x_1) = \phi(x_0)$ c'est à dire $y' = y$, ce qui démontre i).

ii) L'image par l'application $\phi^{[2]}: X^{[2]} \rightarrow Y^{[2]}$ de l'ensemble des parallélogrammes verticaux de X est l'ensemble des parallélogrammes verticaux de Y . Cette application respecte l'équivalence des parallélogrammes et donc elle induit une application surjective ϕ_* du groupe des fibres F de X sur le groupe des fibres de Y . ϕ_* est continue puisque $\phi^{[2]}$ est continue et on vérifie immédiatement que ϕ_* est un homomorphisme de groupes.

Nous remarquons aussi que ϕ_* commute avec les actions des groupes de fibres sur X et Y : pour tout $x \in X$ et tout $u \in F$, $\phi(u \cdot x) = \phi_*(u) \cdot \phi(x)$. Le noyau de ϕ_* est donc l'ensemble de $u \in F$ tels que $\phi(u \cdot x) = \phi(x)$ pour tout $x \in X$, c'est à dire F_0 . La propriété ii) est démontrée. \square

7.2. Le cas où F est un groupe de Lie. Rappelons que le groupe abélien compact F est un groupe de Lie si et seulement si il peut se représenter comme la somme directe d'un tore de dimension finie et d'un groupe fini (chacun de ces deux groupes pouvant être trivial).

Proposition 12. *Supposons que le groupe F est un groupe de Lie. Alors le groupe de structure topologique G_{top} agit transitivement sur X .*

Démonstration. D'après la proposition 10 sommes ramenés à montrer que pour tout $s \in Z$ la suite exacte

$$(3) \quad 0 \longrightarrow F \xrightarrow{i_s} P_s \xrightarrow{q_s} B \longrightarrow 0$$

est continûment scindée, c'est à dire qu'il existe un homomorphisme continu $\kappa_s: P_s \rightarrow F$ vérifiant

$$i_s \circ \kappa_s = \text{Id}_F .$$

La démonstration comprend trois parties. Nous commençons par vérifier que cette suite exacte est continûment scindée pour $s = 1$, puis pour tous les s dans un voisinage W de 1 dans Z et enfin nous concluons par un argument de minimalité.

7.2.1. Première partie : le cas où $s = 1$.

Soient $x, y, x', y' \in X$ avec $\pi(y)\pi(x)^{-1} = \pi(y')\pi(x')^{-1}$. Alors $(x, y, x', y') \in P$ et d'après le lemme 9 de [HK2] les classes $[x, x, y, y]$ et $[x', x', y', y']$ des parallélogrammes (x, x, y, y) et (x', x', y', y') sont identiques. On peut donc définir une application $\rho: Z \rightarrow P$ par

$$\rho(t) = [x, x, y, y] \text{ pour tout } (x, y) \in X \times X \text{ tel que } \pi(y)\pi(x)^{-1} = t .$$

Par construction, l'image de l'application ρ est contenue dans P_1 et $q_1 \circ \rho: Z \rightarrow Z$ est l'application identité. L'application ρ est un homomorphisme de groupes par définition de la multiplication dans P_1 . Son graphe est l'image de $X \times X$ par l'application continue

$$(x, y) \mapsto (\pi(y)\pi(x)^{-1}, [x, x, y, y]): X \times X \rightarrow Z \times P_1$$

et est donc fermé dans $Z \times P_1$. Cette application est donc continue et le groupe P_1 est donc bien la somme directe topologique F et Z . La suite exacte (3) est donc continûment scindée pour $s = 1$ et il existe un homomorphisme continu $\kappa_1: P_1 \rightarrow F$ avec $i_1 \circ \kappa_1 = \text{Id}_F$.

7.2.2. *Deuxième partie : construction d'un voisinage de 1 dans Z .*

Nous écrivons $F = \mathbb{T}^d \times K$, où $d \geq 0$ est un entier et K un groupe fini. Pour tout $s \in Z$, l'homomorphisme continu injectif $i_s: \mathbb{T}^d \times K \rightarrow P_s$ s'écrit alors

$$i_s(u, \xi) = \phi_s(u) \cdot \psi_s(\xi)$$

où $\phi_s: \mathbb{T}^d \rightarrow P_s$ et $\psi_s: K \rightarrow P_s$ sont des homomorphismes continus injectifs avec

$$(4) \quad \phi_s(\mathbb{T}^d) \cap \psi_s(K) = \{1\} .$$

a) Pour tout $s \in Z$ nous construisons un homomorphisme continu $\tau_s: P_s \rightarrow \mathbb{T}^d$ tel que

$$(5) \quad \tau_s \circ \phi_s \text{ est l'identité de } \mathbb{T}^d \text{ et } \tau_s \circ \psi_s: K \rightarrow \mathbb{T}^d \text{ est l'homomorphisme trivial.}$$

Soit $s \in Z$. En composant ϕ_s avec l'application quotient on obtient un homomorphisme continu $\tilde{\phi}_s: \mathbb{T}^d \rightarrow P_s/\psi_s(K)$, qui est injectif d'après (4). Comme \mathbb{T}^d est un groupe injectif, il existe un homomorphisme continu $\tilde{\tau}_s: P_s/\psi_s(K) \rightarrow \mathbb{T}^d$ tel que $\tilde{\tau}_s \circ \tilde{\phi}_s$ soit l'identité de \mathbb{T}^d . En composant avec l'application quotient on obtient un homomorphisme continu $\tau_s: P_s \rightarrow \mathbb{T}^d$ vérifiant (5).

b) Nous construisons maintenant un voisinage W de 1 dans Z et pour tout $s \in W$ un homomorphisme continu $\sigma_s: P_s \rightarrow K$ vérifiant

$$(6) \quad \sigma_s \circ \psi_s = \text{Id}_K .$$

En composant κ_1 avec la projection $F = \mathbb{T}^d \times K \rightarrow K$ on obtient un homomorphisme continu $\sigma_1: P_1 \rightarrow K$ vérifiant la propriété (6) pour $s = 1$.

Comme K est fini il existe un voisinage ouvert U de 1 dans Z et une application continue $\sigma: r^{-1}(U) \rightarrow K$ qui concide avec σ_1 sur P_1 . Pour $s \in U$ on note σ_s la restriction de σ à P_s .

Pour chaque sous-ensemble Y de Z notons

$$R_Y = \{(\alpha, \beta) \in r^{-1}(Y) \times r^{-1}(Y) : r(\alpha) = r(\beta)\} = \bigcup_{s \in Y} P_s \times P_s .$$

Ainsi, R_Y est inclus dans l'ensemble $R_Z = P \times_r P$ considéré dans le lemme 10.

Soit $m: P \times_r P \rightarrow P$ l'application introduite dans ce lemme et définissons $f: R_U \rightarrow K$ par

$$f(\alpha, \beta) = \sigma(m(\alpha, \beta)) \cdot \sigma(\alpha)^{-1} \cdot \sigma(\beta)^{-1} .$$

Ainsi, pour tout $s \in U$ et tous $\alpha, \beta \in P_s$,

$$f(\alpha, \beta) = \sigma_s(\alpha\beta) \cdot \sigma_s(\alpha)^{-1} \cdot \sigma_s(\beta)^{-1} .$$

Comme σ_1 est un homomorphisme, f est égale à 1 sur $P_1 \times P_1$. La continuité de σ et le lemme 10 entraînent que f est continue sur R_U . Comme K est fini, il existe donc un voisinage V de 1 dans Z avec $V \subset U$, tel que cette application soit égale à 1 sur R_V . Ainsi, pour tout $s \in V$, σ_s est un homomorphisme continu de P_s dans K .

Enfin, d'après le corollaire 3, l'application $(s, \xi) \mapsto \psi_s(\xi)$ est continue de $V \times K$ dans $r^{-1}(V)$ et donc l'application $(s, \xi) \mapsto \sigma_s \circ \psi_s(\xi)$ est continue de $V \times K$ dans K . Comme K est fini et que $\sigma_1 \circ \psi_1$ est l'identité de K il existe un voisinage W de 1 dans Z , contenu dans V , tel que (6) soit vérifié pour tout $s \in W$.

c) Remarquons que comme \mathbb{T}^d est connexe et que K est fini, $\sigma_s \circ \alpha_s: \mathbb{T}^d \rightarrow K$ est trivial pour tout $s \in W$. Pour tout $s \in W$ posons

$$\kappa_s = \tau_s \times \sigma_s: P_s \rightarrow \mathbb{T}^d \times K = F.$$

Alors κ_s est un homomorphisme continu et les relations (5) et (6) entraînent que $\kappa_s \circ i_s = \mathbf{Id}_F$ pour tout $s \in W$.

La suite exacte (3) est continûment scindée pour tout s dans le voisinage W de 1 dans Z .

7.2.3. Troisième partie : Invariance par T .

Nous montrons maintenant que l'ensemble des $s \in Z$ pour lesquels la suite exacte (3) est continûment scindée est invariant par T , ce qui achèvera la démonstration par minimalité.

Soit $s \in Z$. Pour tout $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in P_s$ on a $T_1^{[2]}\mathbf{x} = (x_0, Tx_1, x_2, Tx_3) \in P_{Ts}$. L'application $T_1^{[2]}: P_s \rightarrow P_{Ts}$ est clairement continue.

De plus, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P_s$ vérifient $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ alors $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q$ et $(T_1^{[2]}\mathbf{x}, T_1^{[2]}\mathbf{y}) = T_1^{[3]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q$ donc $T_1^{[2]}\mathbf{x} \approx T_1^{[2]}\mathbf{y}$. Ainsi, $T_1^{[2]}: P_s \rightarrow P_{Ts}$ induit une application continue, encore notée $T_1^{[2]}$, de P_s dans lui-même. La définition de la multiplication dans P_s et P_{Ts} entraîne immédiatement que cette application est un homomorphisme de groupes. En remplaçant T par son inverse dans ce qui précède on obtient que cette application est un isomorphisme.

On vérifie immédiatement sur les définitions que $q_{Ts} \circ T_1^{[2]} = q_s$, que $T_1^{[2]}F_s = F_{Ts}$ et que $j_{Ts} \circ T_1^{[2]} = j_s$ donc $T_1^{[2]} \circ i_s = i_{Ts}$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i_s} & P_s & \xrightarrow{q_s} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \mathbf{Id} & & \downarrow T_1^{[2]} & & \downarrow \mathbf{Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{i_{Ts}} & P_{Ts} & \xrightarrow{q_{Ts}} & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes (3) aux points s et Ts .

Si s appartient à Z' la première suite exacte est continûment scindée, donc aussi la deuxième et donc Ts appartient à Z' . Ainsi Z' est invariant par T et contient un voisinage de 1, il est donc égal à Z par minimalité de la rotation (Z, T) , ce qui achève la démonstration. \square

7.3. Fin de la démonstration du théorème 2.

a) *Réduction au cas où F est un groupe de Lie.* Comme F est un groupe abélien compact, il peut s'écrire comme limite projective d'une suite de groupes de Lie. Cela signifie qu'il existe une suite décroissante (F_n) de sous-groupes fermés de F , avec $\cap_n F_n = \{1\}$ et telle que F/F_n soit un groupe de Lie pour tout n .

Soit X_n le quotient de X par l'action de F_n . Comme le système X est la limite projective de la suite (X_n) de systèmes, il suffit de montrer que chacun d'entre eux est limite projective d'une suite de nilsystèmes d'ordre 2.

D'après le lemme 13, la relation de bi-proximité régionale de X_n est l'égalité et le groupe des fibres de X_n est isomorphe à F/F_n . Ainsi, sans perdre en généralité, nous pouvons nous restreindre au cas où F est un groupe de Lie.

b) Comme F est un groupe de Lie, d'après la proposition 12 le groupe G_{top} agit transitivement sur X . D'après la proposition 11, G_{top} est localement compact, le

stabilisateur Γ de e est discret et X peut s'identifier à G_{top}/Γ . On rappelle que G_{top} est nilpotent d'ordre 2.

Le groupe localement compact G_{top} peut s'écrire comme limite projective de groupes de Lie [MZ]. Plus précisément, il existe une suite décroissante (K_n) de sous-groupes compacts de G_{top} , contenus dans le centre de G_{top} , avec $\cap_n K_n = \{1\}$ et telle que G_{top}/K_n soit un groupe de Lie pour tout n .

Pour tout n , $G_{\text{top}}/K_n\Gamma$ muni de la transformation induite par T est un nilsystème d'ordre 2, et X est la limite projective de ces systèmes. \square

8. APPLICATION : UNE CARACTÉRISATION DES NILSUITES D'ORDRE DEUX

8.1. La définition. Soit $(u_n ; n \in \mathbb{Z})$ une suite bornée de nombres complexes. On rappelle que cette suite est *presque périodique* si la famille de ses translatés est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme. Cette propriété est satisfaite si et seulement si il existe une rotation minimale (X, T) , un point $e \in X$ et une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ avec $u_n = f(T^n e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

La notion de *nilsuite* généralise la notion de suite presque périodique. Nous reproduisons la définition de [BHK].

Définition 10. Soit $k \geq 1$ un entier.

Une suite $u = (u_n ; n \in \mathbb{Z})$ de nombres complexes est une *nilsuite de base d'ordre k* s'il existe un nilsystème (X, T) d'ordre k , un point $e \in X$ et une fonction continue f sur X tels que $u_n = f(T^n e)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Une *nilsuite d'ordre k* est une limite uniforme de nilsuites de base d'ordre k .

Ainsi, les nilsuites d'ordre 1 sont les suites presque périodiques.

Dans la définition d'une nilsuite de base on peut supposer sans perdre en généralité que le nilsystème (X, T) est minimal : il suffit en effet de remplacer X par l'orbite fermée de e , qui munie de T est un nilsystème d'ordre k (voir [Le]), transitif donc minimal.

Lemme 14. Soit $k \geq 1$ un entier. Pour que la suite $u = (u_n ; n \in \mathbb{Z})$ de nombres complexes soit une nilsuite d'ordre k il faut et il suffit qu'il existe un système (Y, S) minimal qui soit une limite projective de nilsystèmes d'ordre k , un point $a \in Y$ et une fonction continue h sur X tels que $u_n = h(S^n a)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si la suite u provient d'une limite projective de nilsystèmes comme dans l'énoncé, alors par approximation de la fonction h on obtient immédiatement que cette suite est une nilsuite d'ordre k .

Supposons maintenant que la suite $u = (u_n ; n \in \mathbb{Z})$ est limite uniforme des nilsuites de base $u^{(i)}$ où $u^{(i)} = (u_n^{(i)} ; n \in \mathbb{Z})$ pour tout $i \geq 1$. Pour chaque i choisissons un nilsystème minimal (X_i, T_i) , un point $e_i \in X$ et une fonction continue f_i sur X_i avec

$$u_n^{(i)} = f_i(T_i^n e_i) \text{ pour tous } i \geq 1 \text{ et tous } n \geq 1.$$

Pour tout $i \geq 1$ soient S_i la transformation $T_1 \times \cdots \times T_i$ de $X_1 \times \cdots \times X_i$, $a_i = (e_1, \dots, e_i) \in X_1 \times \cdots \times X_i$ et Y_i l'orbite fermée de a_i pour S_i . Alors $(X_1 \times \cdots \times X_i, S_i)$ est un nilsystème d'ordre k donc (Y_i, S_i) est un nilsystème d'ordre k (voir [Le]), transitif donc minimal. Notons encore g_i la restriction à Y_i de la fonction $(x_1, \dots, x_i) \mapsto f_i(x_i) : X_1 \times \cdots \times X_i \rightarrow \mathbb{C}$. On a :

$$u_n^{(i)} = g_i(S_i^n a_i) \text{ pour tous } i \geq 1 \text{ et tous } n \geq 1.$$

Pour chaque i soit $p_i: X_1 \times \cdots \times X_i \times X_{i+1} \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_i$ la projection naturelle. On a $p_i(a_{i+1}) = a_i$ et $p_i \circ S_{i+1} = S_i \circ p_i$ et par densité on en déduit que $p_i(Y_{i+1}) = Y_i$. Ainsi, $p_i: (Y_{i+1}, S_{i+1}) \rightarrow (Y_i, S_i)$ est une application facteur.

Les systèmes (Y_i, S_i) forment avec les applications p_i un système projectif. La limite projective (Y, S) de ce système est un système minimal. Notons $q_i: Y \rightarrow Y_i$ l'application naturelle, a le point de Y défini par $q_i(a) = a_i$ pour tout i et h_i la fonction continue $g_i \circ q_i$ sur Y . Nous avons

$$u_n^{(i)} = h_i(S^n a) \text{ pour tous } i \geq 1 \text{ et tous } n \geq 1.$$

Quand $i \rightarrow +\infty$, $u_n^{(i)} \rightarrow u_n$ uniformément, donc la suite de fonctions (h_i) converge uniformément sur l'orbite $\{S^n a; n \in \mathbb{Z}\}$ de a . Comme cette orbite est dense dans Y , la suite de fonctions (h_i) converge uniformément sur Y . Soit h la limite de cette suite. h est une fonction continue sur Y et $u_n = h(S^n a)$ pour tout n . \square

8.2. Une caractérisation des nilsuites d'ordre deux.

Théoreme 8. Soit $u = (u_n; n \in \mathbb{Z})$ une suite bornée de nombres complexes.

– Pour que la suite u soit presque périodique il faut et il suffit que

- (7) pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $M \geq 1$ et $\delta > 0$ tels que pour tous $k, m, n \in \mathbb{Z}$ on ait :
- si pour tout $i \in [k - M, k + M]$ on a $|u_{i+m} - u_i| < \delta$ et $|u_{i+n} - u_i| < \delta$
alors on a $|u_{k+m+n} - u_k| < \epsilon$.

– Pour que la suite u soit une nilsuite d'ordre deux il faut et il suffit que

- (8) pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $M \geq 1$ et $\delta > 0$ tels que pour tous $k, m, n, p \in \mathbb{Z}$ on ait :
- si pour tout $i \in [k - M, k + M]$ on a
- (*) $|u_{i+m} - u_i| < \delta$, $|u_{i+n} - u_i| < \delta$, $|u_{i+m+n} - u_i| < \delta$, $|u_{i+p} - u_i| < \delta$,
 $|u_{i+m+p} - u_i| < \delta$ et $|u_{i+n+p} - u_i| < \delta$
alors $|u_{k+m+n+p} - u_k| < \epsilon$.

Ainsi, les suites presque périodiques et les nilsuites d'ordre 2 sont caractérisées par des propriétés de régularité arithmétique des *temps de retour*. L'uniformité en k, m, n, p dans (8) peut se traduire en termes topologiques, comme dans la définition classique d'une suite presque périodique, mais nous ne développons pas ces considérations ici.

Démonstration. Nous ne montrons que la deuxième affirmation, la preuve de la première étant similaire et plus simple.

a) Soient $u = (u_n; n \in \mathbb{Z})$ une suite bornée et $D \subset \mathbb{C}$ un disque fermé contenant u_n pour tout n . Muni de la topologie de la convergence simple, $D^{\mathbb{Z}}$ est un espace compact métrisable, par exemple au moyen de la distance d définie par

$$\text{pour } x = (x_n; n \in \mathbb{Z}) \text{ et } y = (y_n; n \in \mathbb{Z}), \quad d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |x_n - y_n|.$$

Nous munissons $D^{\mathbb{Z}}$ du décalage T défini par

$$\text{pour tout } x \in D^{\mathbb{Z}}, \quad (Tx)_n = x_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, T est un homéomorphisme de X .

Considérons la suite u comme un élément de $D^{\mathbb{Z}}$ et soit X l'orbite fermée de u sous la transformation T . Par construction, (X, T) est un système transitif.

b) Supposons maintenant que l'hypothèse (8) est satisfaite.

Soient $\epsilon > 0$ et M, δ comme dans (8). Soient $N \geq 0$ un entier, $k, m, n, p \in \mathbb{Z}$ et supposons que les conditions (*) sont vraies pour tout $i \in [k - M - N, k + M + N]$. Alors, en appliquant l'hypothèse aux entiers $k + j$ avec $|j| \leq N$ on obtient que, pour tout $i \in [k - N, k + N]$ on a $|u_{k+m+n+p} - u_k| < \epsilon$.

Par définition de la distance sur $D^{\mathbb{Z}}$, cette propriété peut s'écrire :

$$(9) \quad \begin{aligned} &\text{pour tout } \epsilon > 0 \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que, pour tous } k, m, n, p \in \mathbb{Z} \\ &\text{si } d(T^{k+m}u, T^k u) < \delta, \ d(T^{k+n}u, T^k u) < \delta, \ d(T^{k+m+n}u, T^k u) < \delta, \\ &\quad d(T^{k+p}u, T^k u) < \delta, \ d(T^{k+m+p}u, T^k u) < \delta \text{ et } d(T^{k+n+p}u, T^k u) < \delta \\ &\text{alors } d(T^{k+m+n+p}u, T^k u) < \epsilon. \end{aligned}$$

Par densité de $(T^k u ; k \in \mathbb{Z})$ dans X et par continuité de T on obtient que

$$(10) \quad \begin{aligned} &\text{pour tout } \epsilon > 0 \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que, pour tous } m, n, p \in \mathbb{Z} \text{ et tout } x \in X, \\ &\text{si } d(T^m x, x) < \delta/2, \ d(T^n x, x) < \delta/2, \ d(T^{m+n} x, x) < \delta/2 \\ &\quad d(T^p x, x) < \delta/2, \ d(T^{m+p} x, x) < \delta/2 \text{ et } d(T^{n+p} x, x) < \delta/2 \\ &\text{alors } d(T^{m+n+p} x, x) < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Par définition de \mathbf{Q} nous obtenons que si $(x, x, \dots, x, y) \in \mathbf{Q}$ alors $x = y$. Le lemme 1 entraîne alors que la relation \mathbf{RP}_s^2 est l'égalité. D'après le théorème 2, le système (X, T) est donc une limite projective de nilsystèmes d'ordre 2.

L'application f qui à chaque $x = (x_n ; n \in \mathbb{Z}) \in X$ associe x_0 est une fonction continue, et on a $f(T^n u) = u_n$ pour tout n . La suite $u = (u_n ; n \in \mathbb{Z})$ est donc une nilsuite d'ordre 2.

c) Nous montrons maintenant que la propriété (8) est satisfaite par toute nilsuite d'ordre deux. Comme cette propriété est stable par limite uniforme nous pouvons nous restreindre au cas des nilsuites de base.

Soient (Y, S) un nilsystème minimal d'ordre 2, $e \in Y$ et f une fonction continue sur Y avec $u_n = f(S^n y)$ pour tout n .

Soit D un disque fermé de \mathbb{C} contenant toutes les valeurs de la fonction f . Définissons une application $p : Y \rightarrow D^{\mathbb{Z}}$ par

$$\text{pour tout } y \in Y \text{ et tout } n \in \mathbb{Z}, \ (p(y))_n = f(T^n y).$$

Cette application vérifie clairement $p \circ S = T \circ p$ et $p(e) = u$. Par densité, l'image de p est X et p est donc une application facteur de (Y, S) sur (X, T) . Ainsi, (X, T) est un facteur d'un nilsystème d'ordre 2 et est donc aussi un nilsystème d'ordre deux, transitif donc minimal.

La relation \mathbf{RP}_s^2 sur X est donc l'égalité. On en déduit immédiatement (10) puis (9) et enfin (8). \square

RÉFÉRENCES

- [Au] J. Auslander. *Minimal Flows and their Extensions*, North-Holland mathematics studies **153** (1988).
- [AGH] L. Auslander, L. Green et F. Hahn. Flows on homogeneous spaces. *Ann. Math. Studies* **53**, Princeton Univ. Press (1963).

- [BHK] V. Bergelson, B. Host et B. Kra, avec un appendice par I.Z. Ruzsa. Multiple recurrence and nilsequences, *Invent. Math.* **160**, no. 2, 261–303.
- [BK] H. Becker et A. S. Kechris. *The descriptive theory of Polish groups actions*. London Math. Soc. Series **232**, Cambridge Univ. Press (1996).
- [CL1] J.-P. Conze et E. Lesigne. Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales. *Publications de l'Institut de Recherche de Mathématiques de Rennes, Probabilités*, 1987.
- [CL2] J.-P. Conze and E. Lesigne. Sur un théorème ergodique pour des mesures diagonales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **306** (1988), 491–493.
- [Fu] H. Furstenberg. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*. Princeton Univ. Press (1981).
- [GT1] B. Green et T. Tao. Linear equations in primes. *Prépublication*.
- [GT2] B. Green et T. Tao. An inverse theorem for the Gowers $U^3(G)$ norm. À paraître dans *Proc. Endin. Math. Soc.*
- [HK1] B. Host et B. Kra. Nonconventional averages and nilmanifolds. *Ann. of Math.* (2) **161** (2005), no. 1, 398–488.
- [HK2] B. Host et B. Kra. Parallelepipeds, nilpotent groups, and Gowers norms. *prépublication*
- [Le] A. Leibman. Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold. *Erg. Th. & Dyn. Sys.* **25** (2005), no. 1, 201–213.
- [MZ] D. Montgomery et L. Zippin. *Topological Transformation Groups*. Interscience Publishers (1955).
- [Pa] W. Parry. Dynamical systems on nilmanifolds. *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 37–40.
- [Ru] D.J. Rudolph. Eigenfunctions of $T \times S$ and the Conze-Lesigne algebra. *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis*, Eds. : Petersen & Salama, Cambridge University Press, New York (1995), 369–432.

B. HOST : ÉQUIPE D'ANALYSE ET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES, UNIVERSITÉ DE MARNE LA VALLÉE, 5 BD. DESACRITES, CHAMPS SUR MARNE, 77454 MARNE LA VALLÉE CEDEX – FRANCE
E-mail address: `bernard.host univ-mlv.fr`

A. MAASS : DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD DE CHILE & CENTRO DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO, UMI 2071 UCHILE-CNRS, CASILLA 170/3 CORREO 3, SANTIAGO, CHILE.
E-mail address: `amaass@dim.uchile.cl`